

Marica Franzini

Laboratorio di Geomatica - DICAr

Università di Pavia

email: marica.franzini@unipv.it

Unità di misura angolari

1 - Alcune definizioni

Cos'è un angolo?

L'angolo è uno delle entità appartenenti alla geometria euclidea e si indica generalmente con le lettere greche minuscole α , β , γ ,...

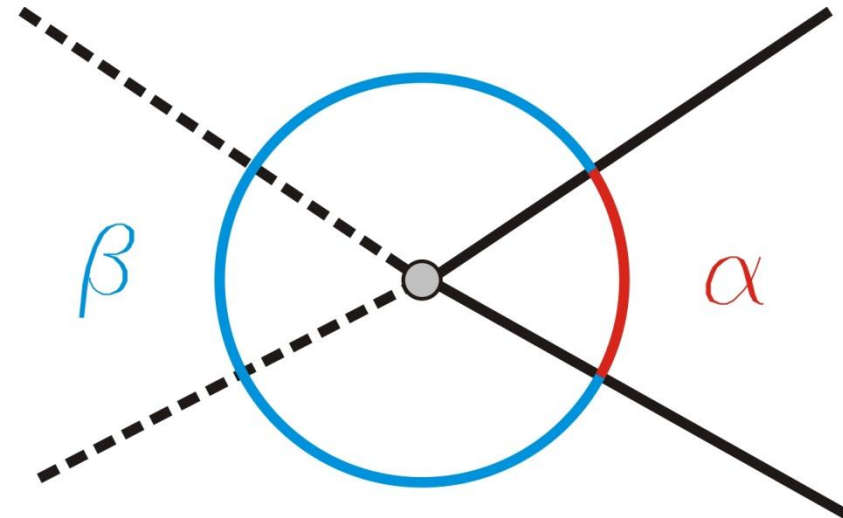
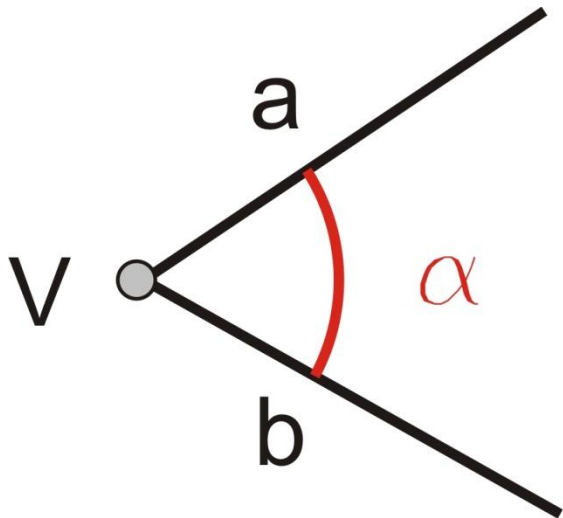
Esistono due definizioni di angolo:

1. definizione statica
2. definizione cinematica

Definizione statica di angolo

Un angolo è ciascuna delle due parti di un piano individuate da due semirette (a e b), dette lati, aventi origine V in comune.

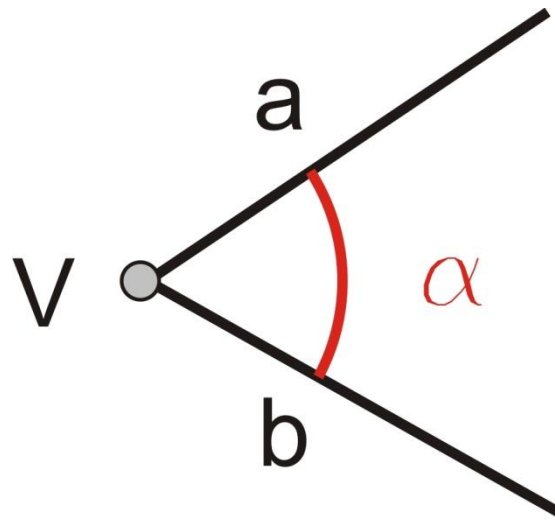
La parte di piano che non contiene i prolungamento dei lati si dice angolo convesso (angolo α), mentre la parte che contiene i prolungamenti dei lati si dice angolo concavo (angolo β).



Definizione cinematica di angolo

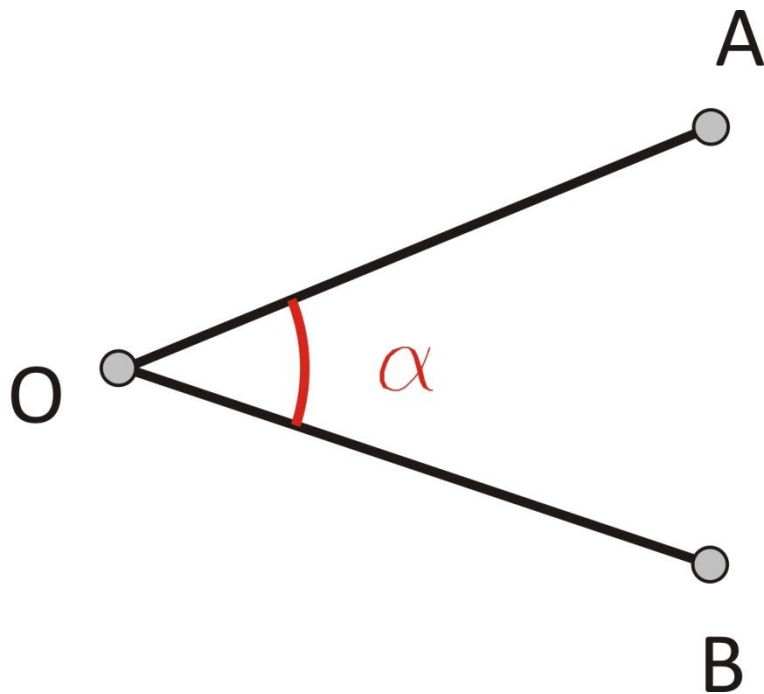
La definizione data di angolo non è adatta per descrivere tutte le situazioni (ad esempio, come vedremo, in topografia); si introduce una seconda definizione di angolo basata sulla rotazione, cioè sul movimento che porta uno dei due lati a sovrapporsi al secondo lato.

L'angolo viene descritto in termini cinematici come la superficie coperta da un lato (ad esempio a), durante la rotazione attorno al suo estremo V, per raggiungere l'altro lato (ad esempio b).



Angoli non orientati

Facciamo riferimento alla definizione cinematica di angolo e consideriamo l'angolo α formato dalle due semirette \overrightarrow{OA} e \overrightarrow{OB} .



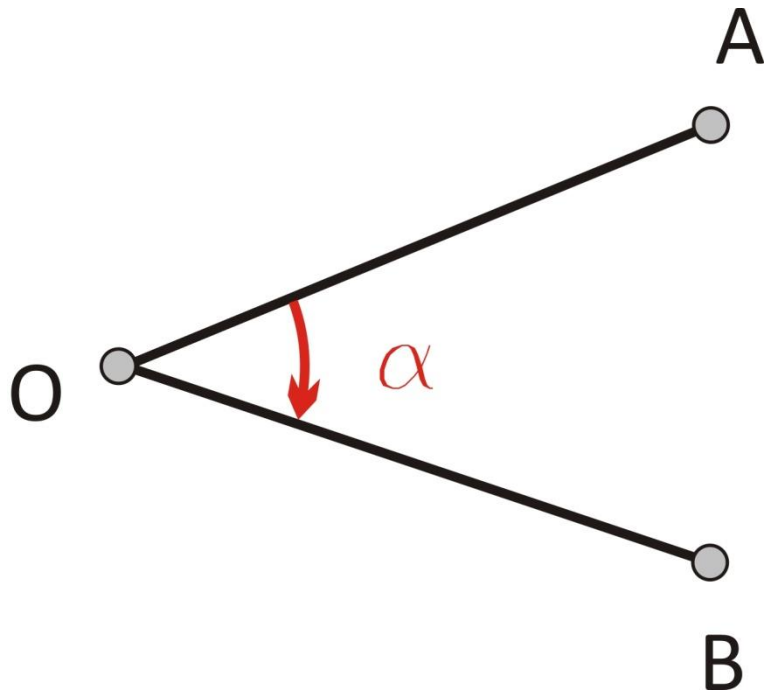
Si può pensare indifferentemente che l'angolo α sia:

- quello generato da \overrightarrow{OB} (inizialmente coincidente con \overrightarrow{OA}) ruotando in senso orario
- quello generato da \overrightarrow{OA} (inizialmente coincidente con \overrightarrow{OB}) ruotando in senso antiorario

Per questo si usa dire che quelli definiti finora sono **angoli non orientati**. Un angolo non orientato ha sempre una misura positiva.

Angoli orientati - 1

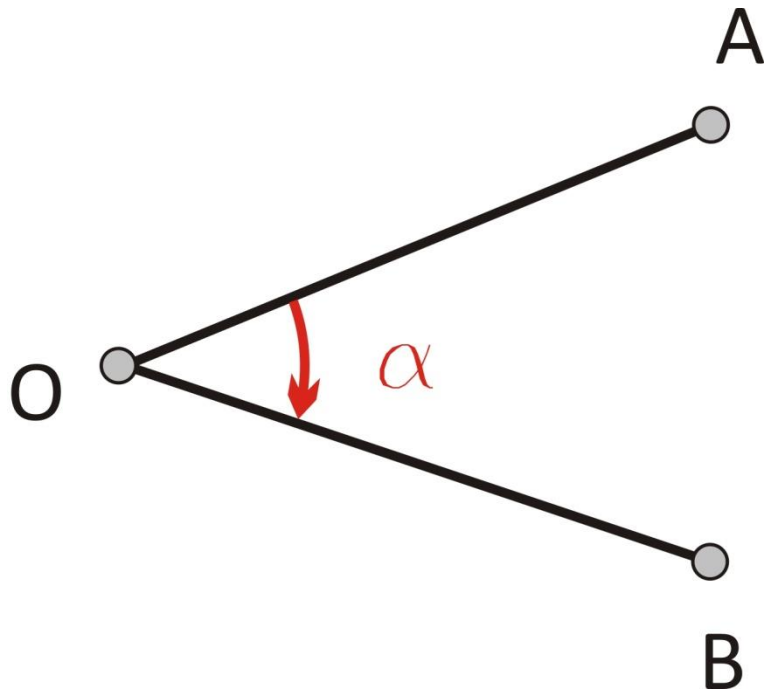
La definizione cinematica è alla base della definizione di **angoli orientati**.



Per considerare gli angoli orientati è necessario:

- fissare una semiretta origine - \overrightarrow{OA} nel nostro caso
- fissare convenzionalmente il verso di rotazione corrispondente agli angoli positivi (nelle dispense è adottato il verso orario, che costituisce la convenzione utilizzata in topografia)

Angoli orientati - 2



Si dice che l'angolo α formato da \overrightarrow{OB} è positivo se la semiretta è ruotata in senso orario rispetto alla semiretta d'origine \overrightarrow{OA} .

E' negativo nel caso contrario.

Gli angoli orientati sono alla base delle misure topografiche.

2 - Unità di misura angolari

Ampiezza di un angolo

Ogni angolo ha una ampiezza, quantità descritta in gradi.

Esistono quattro unità di misura principali per gli angoli:

- radianti
- gradi sessadecimali
- gradi centesimali
- gradi sessagesimali

Le prime tre, al contrario della quarta, sono unità di misura decimali.

Verranno esposti:

- le principali proprietà
- i metodi di conversione

Nomi anglosassoni

Nella letteratura anglosassone alle unità angolari sono associati degli acronimi:

- radianti: RAD (Radiants)
- gradi sessadecimali: DEG (Degrees)
- gradi centesimali: GRAD (Gradients) o anche GONS
- gradi sessagesimali: DMS (Degrees, Minutes, Seconds)

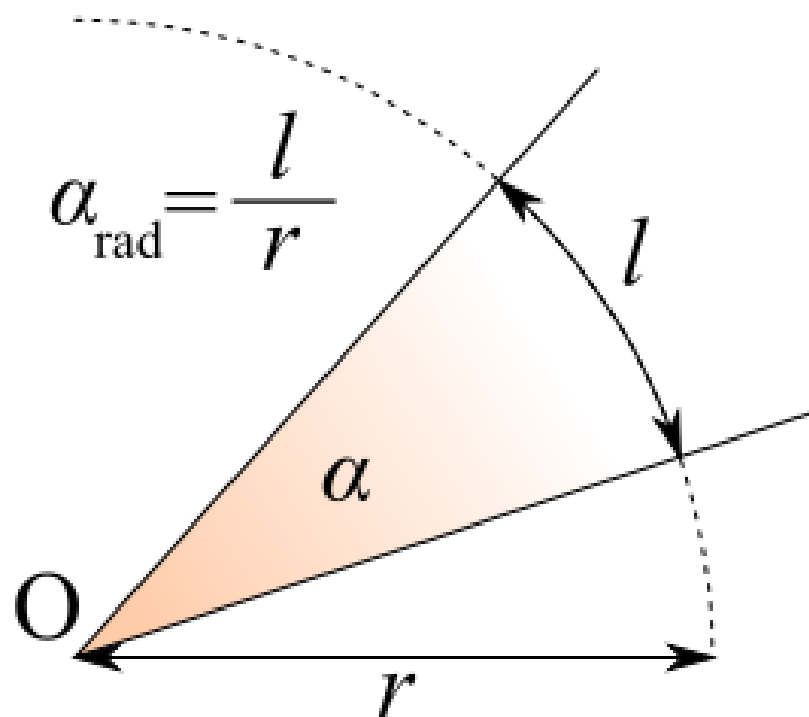
La conoscenza di tali acronimi può essere utile perché, ad esempio, le calcolatrici tascabili e i software di gestione degli strumenti topografici li adottano.

Radiani - 1

Il radiante è l'unità di misura degli angoli nel Sistema Internazionale di Unità di misura.

Tale misura rappresenta il rapporto tra la lunghezza di un arco di circonferenza spaziato dall'angolo, e la lunghezza del raggio di tale circonferenza.

Considerando una circonferenza intera di raggio unitario ($r=1$) si ha che la lunghezza l , dell'intero circonferenza, è pari a 2π .



Radiani - 2

Quindi:

- angolo giro: $\alpha^r = 2\pi = 6.28318530717959 \dots$
- angolo piatto: $\alpha^r = \pi = 3.14159265358979 \dots$
- angolo retto: $\alpha^r = \pi/2 = 1.57079632679490 \dots$

I radianti sono gli unici tipi di angoli riconosciuti da tutti i sistemi di calcolo. In genere, i linguaggi di programmazione (come anche Excel) gestiscono solo questo tipo unità e, dovendo elaborare dati espressi in altre unità, è necessario convertirli.

Angoli sessadecimali

Si tratta della versione decimale dei sessagesimali (definiti in seguito).

In questo caso:

- angolo giro: $\alpha^d = 360^d$
- angolo piatto: $\alpha^d = 180^d$
- angolo retto: $\alpha^d = 90^d$

Le frazioni di angoli sono espresse in decimali, indicate con un numero dopo la virgola; ad esempio: $26^d.763973$.

Gli angoli sessadecimali erano usati negli strumenti topografici, ma oggi sono stati quasi completamente sostituiti dai centesimali. Alcuni software topografici utilizzano ancora questa unità per esprimere la posizione geografica dei vertici.

Angoli centesimali

Per gli angoli centesimali:

- angolo giro: $\alpha^g = 400^g$
- angolo piatto: $\alpha^g = 200^g$
- angolo retto: $\alpha^g = 100^g$

Attualmente la grande maggioranza degli strumenti topografici usa angoli centesimali. Vengono utilizzati anche in fotogrammetria.

Questa unità di misura è quindi convenzionalmente utilizzata per tutti i calcoli topografici.

Angoli sessagesimali

Per gli angoli sessagesimali:

- angolo giro: $\alpha^{dms} = 360^\circ$
- angolo piatto: $\alpha^{dms} = 180^\circ$
- angolo retto: $\alpha^{dms} = 90^\circ$

Le frazioni non sono decimali, ma sono costituite dai primi e dai secondi:

- un grado è costituito da 60 primi
- un primo consta di 60 secondi; di conseguenza un grado corrisponde a 3600 secondi
- le frazioni di secondo sono decimali.

Un angolo sessagesimale si indica ad esempio come $45^\circ 27' 19''.89983$.

Usati per esprimere le coordinate geografiche di un punto, cioè latitudine e longitudine.

In sintesi

Unità	Abb.	Angolo retto	Angolo giro	Esempio	Decimale
radianti	RAD	$\pi/2$	2π	0.78877140487	si
sessadecimali	DEG	90	360	45.1932725	si
centesimali	GRAD	100	400	50.2147472	si
sessagesimali	DMS	90	360	45°11'35".781	no

Conversione fra formati angolari decimali - 1

Le conversioni fra i formati decimali sono agevoli e comportano il calcolo di semplici proporzioni.

Le relazioni fra la misura sessadecimale α^d , centesimale α^g , e in radianti α^r , di uno stesso angolo sono data da:

$$\frac{\alpha^d}{180} = \frac{\alpha^g}{200} = \frac{\alpha^r}{\pi}$$

Se ad esempio si ha:

$$\begin{aligned}\alpha^d &= 167.775921 \\ \alpha^r &= \alpha^d \frac{\pi}{180} = 2.92824223\end{aligned}$$

Più complesso è il caso della conversione fra uno qualunque dei formati decimali e il formato sessagesimale.

Si esegue in due passi: dal formato iniziale a DEG e da DEG a DMS.

Conversione angoli sessagesimali - 1

Effettuiamo la trasformazione tra DMS e DEG in andata e ritorno.

Anzitutto consideriamo la conversione da DMS a DEG, utilizzando come angolo di partenza:

$$\alpha^{DMS} = 96^{\circ} 20' 41.47''$$

Un numero sessagesimale deve essere pensato come una terna di numeri:

$$\alpha^{DMS} = (g, p, s) = (96, 20, 41.47)$$

Un numero di primi p corrisponde a una frazione di grado pari a $p/60$ e un numero di secondi s corrisponde a una frazione di grado pari a $s/3600$.

Allora:

$$\alpha^{DEG} = g + \frac{p}{60} + \frac{s}{3600} = 96 + \frac{20}{60} + \frac{41.47}{3600} = 96.344853$$

Conversione angoli sessagesimali - 2

Consideriamo ora la conversione nel senso opposto, utilizzando come angolo di partenza:

$$\beta^{DEG} = 96.344853$$

Dobbiamo trovare il valore degli elementi della terna: $\alpha^{DMS} = (g, p, s)$.

Per la conversione occorre utilizzare la funzione **parte intera** $int(x)$ e la funzione **mantissa** $\{x\}$.

Viene definita parte intera il più grande numero intero minore od uguale ad x con $x \in \mathbb{R}$; ad esempio $int(96.344853) = 96$.

Viene definita mantissa la parte frazionaria (decimale) rimanente ricavabile come differenza tra il numero e la sua parte intera: $\{x\} = x - int(x)$.

Ad esempio $\{96.344853\} = 0.344853$

Conversione angoli sessagesimali - 3

Intuitivamente: $g = \text{int}(\beta^{DEG}) = 96$

E' stato individuato il primo valore della terna. La mantissa ($\{\beta^{DEG}\} = 0.344853$) esprime la parte frazionaria di gradi che devo convertire per estrarre i valori p ed s .

Il numero di primi viene ottenuto moltiplicando per 60 e considerando la parte intera.

$$p = \text{int}(\{\beta^{DEG}\} * 60) = \text{int}(0.344853 * 60) = \text{int}(20.69118) = 20$$

I secondi vengono ottenuti moltiplicando semplicemente la seconda mantissa (che esprime la parte frazionaria di primi) per 60

$$s = 0.69118 * 60 = 41.47$$

Esercizi

La tabella seguente indica le misure di alcuni angoli in tutte le unità considerate. Essa offre la possibilità di esercitarsi nella varie conversioni.

Suggerimenti

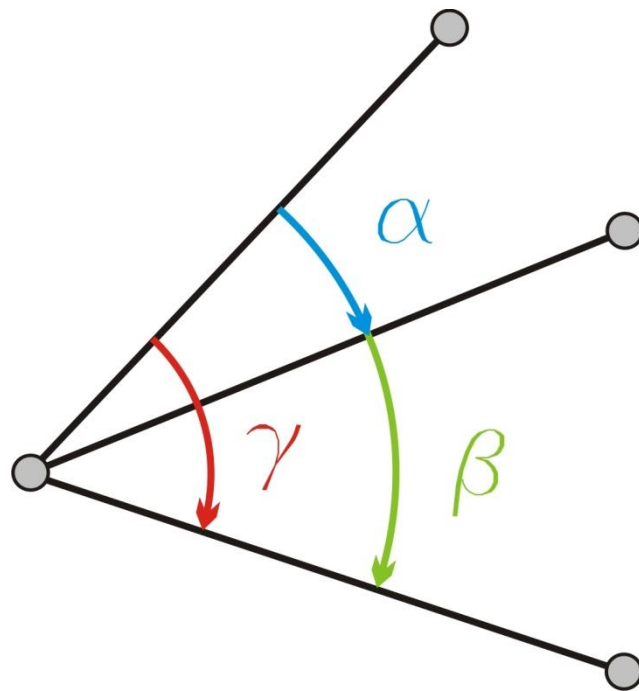
- usare in input tutte le cifre decimali indicate: i risultati devono coincidere almeno fino alla penultima cifra decimale
- per il valore di π usare quello fornito dalla calcolatrice, senza troncamenti

DMS	DEG	GRAD	RAD
285°11'40".70	285.194638	316.882932	4.97758545
345°25'2".19	345.417274	383.796971	6.02866872
236°3'59".95	236.066652	262.296280	4.12014033
12°51'22".33	12.856204	14.284671	0.22438309
305°41'11".58	305.686550	339.651722	5.33523678

Aritmetica degli angoli - 1

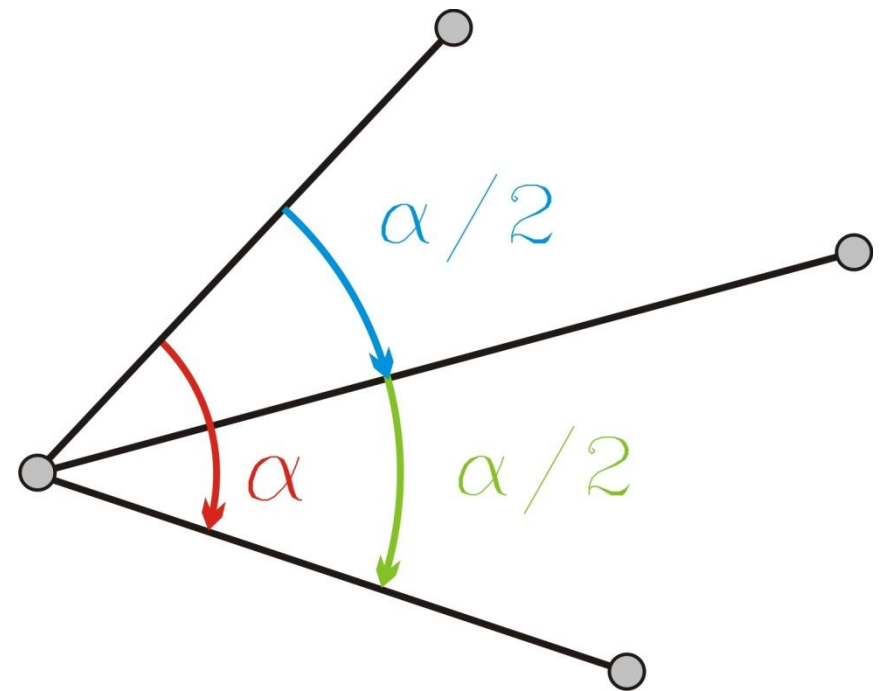
Per le tre unità di misura decimali (sessadecimali, centesimali e radianti) le quantità angolari sono numeri reali e le operazioni elementari seguono le regole dei numeri reali.

Somma tra due angoli



$$\gamma = \alpha + \beta$$

Divisione di un angolo



$$\gamma = \alpha/2$$

Aritmetica degli angoli - 2

Per i gradi sessagesimali le quantità angolari non sono in realtà semplici numeri reali ma terne di numeri (g, p, s) che si possono sommare e moltiplicare, ma non secondo le regole della aritmetica dei numeri.

Ad esempio:

- la somma tra due angoli

$$\begin{aligned} 45^\circ/2 &\neq 22.50 \\ &= 22^\circ30' \end{aligned}$$

- la metà di un angolo

$$\begin{aligned} 1^\circ40' + 1^\circ50' &\neq 2^\circ90' \\ &= 3^\circ30' \end{aligned}$$

Esiste una aritmetica dei sessagesimali le cui regole di base si possono semplicemente ricavare ricordando la definizione di tali angoli.

Verifica di autoapprendimento

1. Definizione cinematica di angolo
2. Definizione di angolo orientato nella convenzione topografica
3. Unità di misura angolari
4. Unità di misura angolare utilizzata nella convenzione topografica
5. Conversione tra i diversi formati angolari
6. Aritmetica tra angoli decimali e non