



**Marica Franzini**

**Laboratorio di Geomatica - DICAr**

**Università di Pavia**

**email: [marica.franzini@unipv.it](mailto:marica.franzini@unipv.it)**



# Principi di posizionamento

# 1 - Il segnale GPS

## Premessa

---

I segnali GPS giocano un ruolo chiave nell'architettura del sistema e sono costituiti da onde elettromagnetiche che si propagano dal satellite verso il ricevitore.

La propagazione di un segnale elettromagnetico viene descritta dalla Fisica per mezzo delle equazioni di Maxwell, in termini di variazioni nello spazio e nel tempo dei campi elettrico e magnetico.

Tali fenomeni sono estremamente complessi, tuttavia è possibile dare una descrizione semplificata ma molto rappresentativa, basata sulle onde piane.

Un'onda piana è un'onda a frequenza costante e la cui ampiezza picco-picco è anch'essa costante; può essere descritta tramite pochi e semplici parametri.

## Richiami

- Periodo  $T$ : tempo in cui viene emesso un ciclo completo  $\rightarrow T = \frac{\lambda}{c}$
- Frequenza  $f$ : numero di cicli completi emessi nell'unità di tempo  $\rightarrow f = \frac{1}{T}$
- Lunghezza d'onda  $\lambda$ : distanza percorsa dall'onda nel tempo  $T \rightarrow \lambda = T \cdot c$

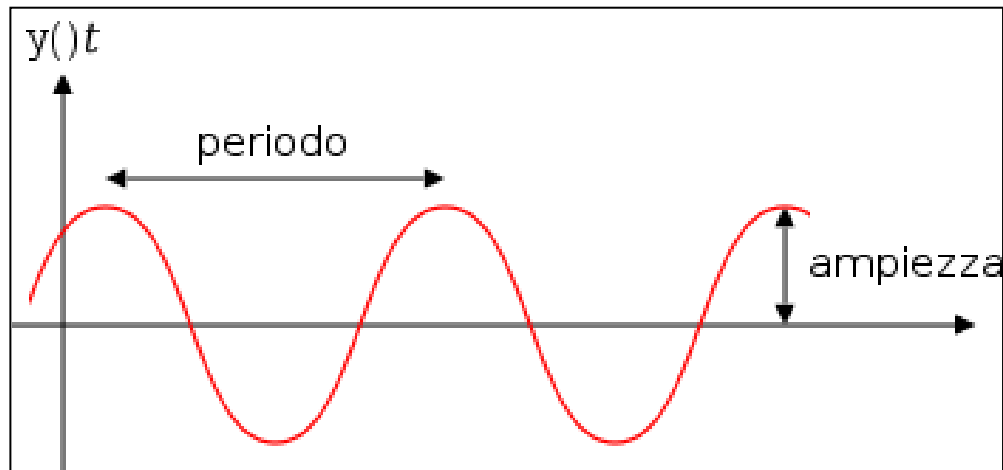


Grafico nel tempo

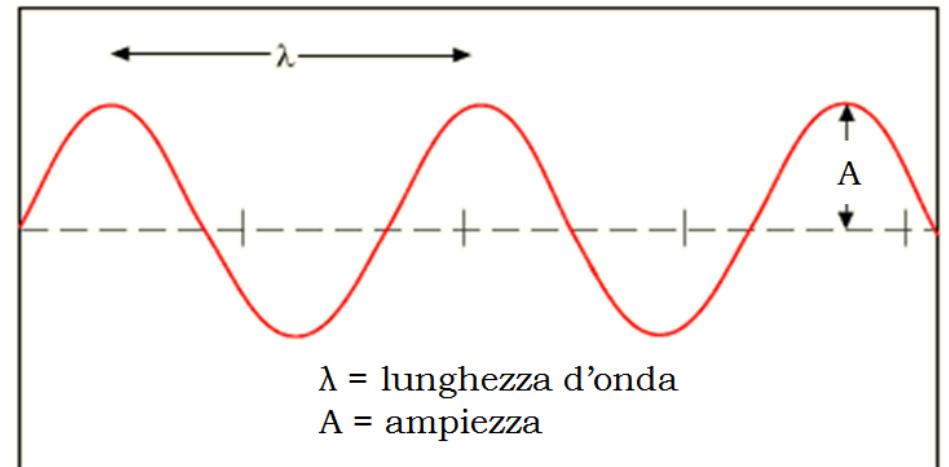


Grafico nello spazio

## Trasmettere informazioni

---

Le onde piane sono il cardine delle tecniche di trasmissione poiché sono facili da generare e da ricevere. Hanno però una bassa capacità di trasmettere informazioni: fissata l'ampiezza e la lunghezza d'onda si possono trasmettere al più due numeri (informazioni).

Ma se devo trasmettere informazioni, come ad esempio:

- un messaggio mail
- un file
- un'immagine
- una registrazione audio
- l'andamento in funzione del tempo di un qualsiasi fenomeno fisico

... devo modificare l'onda piana attraverso la modulazione del segnale.

# Modulazione del segnale

---

## NOMENCLATURA:

- modulazione - tecnica per cui un messaggio viene trasmesso tramite modifica di un'onda piana
- portante - onda piana sfruttata
- segnale - risultato della modulazione

Esistono diverse tecniche per la modulazione del segnale; il GPS utilizza la ***modulazione binaria di fase***.

## La modulazione ed il GPS

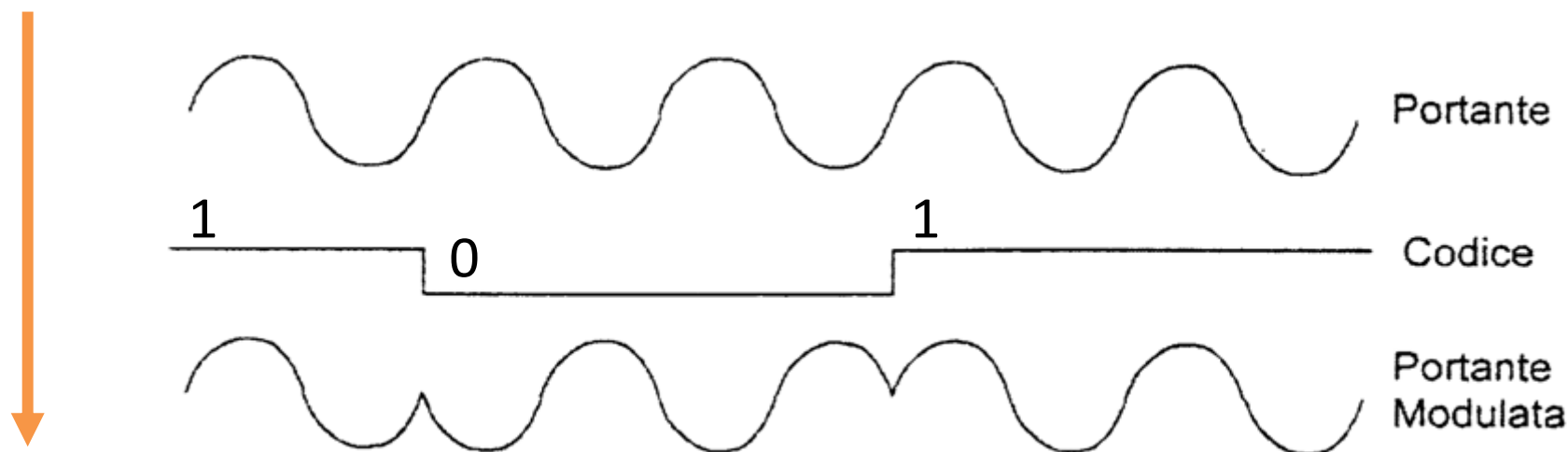
---

Per la complessità delle informazioni che i satelliti devono inviare verso i ricevitori , il sistema GPS si basa sulla modulazione binaria di fase (BPSK – Binary Phase Shift Keying).

Il termine "binario" indica che il messaggio inviato assume unicamente i valori 1 e 0; in altri termini viene trasmesso un codice binario.

## BPSK - 1

Nella BPSK ogni transizione del codice (passaggio da 0 a 1 o viceversa) provoca una variazione nella fase della portante di  $\pi$ .

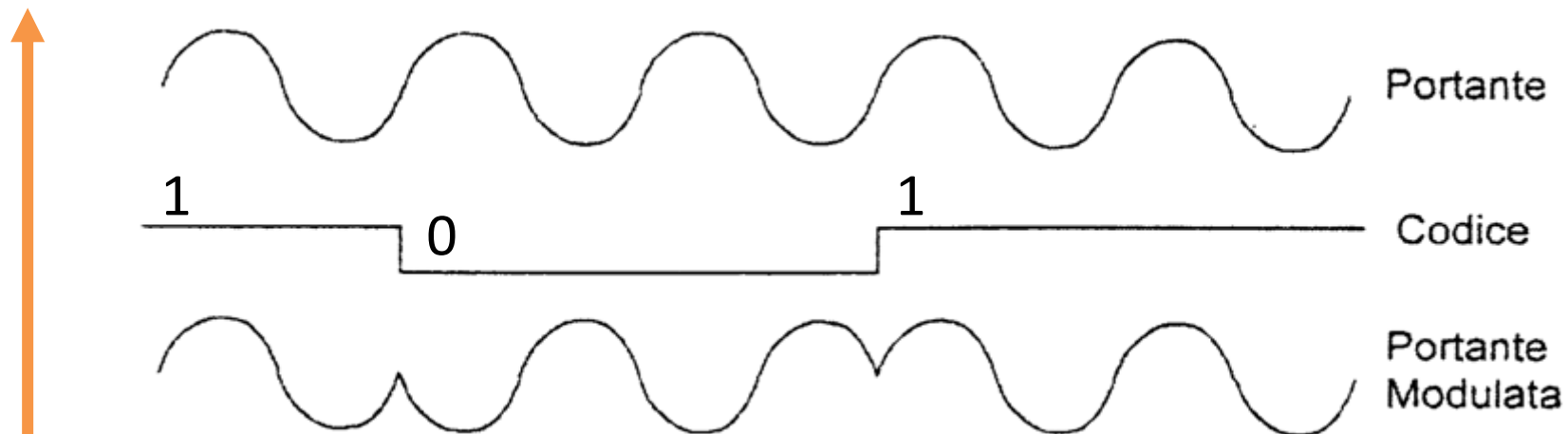


NB - Insieme al metodo di modulazione deve esistere anche quello di demodulazione; il ricevente deve riuscire ad interpretare il segnale in modo da poter risalire al messaggio originario.



## BPSK - 2

Per demodulare un segnale ottenuto con BPSK è sufficiente modularlo una seconda volta con lo stesso codice:



Modulando due volte la BPSK con lo stesso codice, il risultato è la portante pura o, in altri termini, la seconda modulazione elimina la prima.

## BPSK - 3

---

Una caratteristica importante della BPSK è che può essere reiterata in modo da modulare più codici sulla stessa portante.

Nel caso di due codici:

1. si modula il primo codice
2. si modula il secondo codice sul risultato della prima modulazione

Queste due caratteristiche - la capacità di demodulazione e quella di modulare più codici sulla stessa portante - sono due caratteristiche fondamentali alla base del posizionamento GPS.

## Il segnale GPS

---

Alcuni punti chiave:

- il GPS utilizza la BSPK per inviare messaggi
- i satelliti generano onde piane e le modulano per inviare verso terra le informazioni necessarie ai ricevitori per il posizionamento
- gli orologi atomici di bordo vengono sfruttati per generare onde piane di una prefissata frequenza

Nel GPS esiste quindi una frequenza fondamentale pari a  $f_0 = 10.23 \text{ Mhz}$

## Le portanti - 1

---

Abbiamo detto che con il termine portante si indica l'onda piana utilizzata per modulare un segnale.

In realtà il GPS non utilizza un'unica onda piana ma due differenti onde ottenute a partire dalla frequenza fondamentale.

Da  $f_0$  vengono generate due frequenze:

1.  $f_1 = 154 \cdot f_0 = 1.575420 \text{ Ghz}$
2.  $f_2 = 120 \cdot f_0 = 1.227600 \text{ Ghz}$

I satelliti emettono quindi un segnale complesso caratterizzato dalla presenza di due onde piane portanti dette  $L_1$  e  $L_2$ , aventi frequenze  $f_1$  e  $f_2$ .

## Le portanti - 2

---

Alle frequenze  $f_1$  e  $f_2$  corrispondono le due lunghezze d'onda:

1.  $\lambda_1 = \frac{c}{f_1} \cong 19 \text{ cm}$

2.  $\lambda_2 = \frac{c}{f_2} \cong 24 \text{ cm}$

Su queste due portanti vengono modulati tre differenti codici binari:

- codice C/A
- codice P
- codice D

## I codici C/A e P

---

I codici C/A e P sono sequenze pseudo-casuali di 0 ed 1 (quindi non contengono vere e proprie informazioni) la cui unica funzione è permettere di effettuare il posizionamento (vedremo più avanti come):

- C/A - coarse acquisition (acquisizione grezza)
- P - precision (precisione)

NB - I codici sono noti sia ai satelliti che ai ricevitori

Perché due?

Hanno caratteristiche (frequenza e lunghezza d'onda) diverse e permettono di effettuare il posizionamento con diversi livelli di accuratezza: il codice C/A è accessibile a tutti mentre il codice P è accessibile ai soli utenti qualificati.

## Il codice D

---

Il codice D è un codice binario che contiene tutte le informazioni alfanumeriche necessarie ai ricevitori per effettuare il posizionamento.

Le informazioni principali trasmesse sono:

- l'almanacco dei satelliti, cioè un modello semplificato che permette di prevedere la posizione approssimativa di tutti i satelliti (utile per il *planning*)
- informazioni sullo stato di salute
- le effemeridi predette
- una stima dello sfasamento degli orologi di bordo del satellite

## La struttura del segnale

---

Perché il segnale è così complesso?

- deve permettere di inviare un elevato numero di informazioni
- nato come sistema militare non permette una comunicazione “a due vie” che invece permetterebbe un’eventuale semplificazione del segnale. La presenza dei codici permette di effettuare posizionamento utilizzando solo le informazioni provenienti dai satelliti



## 2 - Principi di posizionamento

## Il problema nel piano - 1

---

Il posizionamento GPS si basa essenzialmente sulla capacità, da parte del ricevitore, di determinare la posizione del vertice occupato con misure di sola distanza; in particolare della distanza satellite-ricevitore.

Proviamo anzitutto a ragionare, per semplicità, nel piano.

Abbiamo un insieme di punti di coordinate note  $P_i$  e un punto incognito  $P$ .

Sappiamo misurare le distanze  $d_i$  fra i punti  $P_i$  e quello incognito  $P$ .

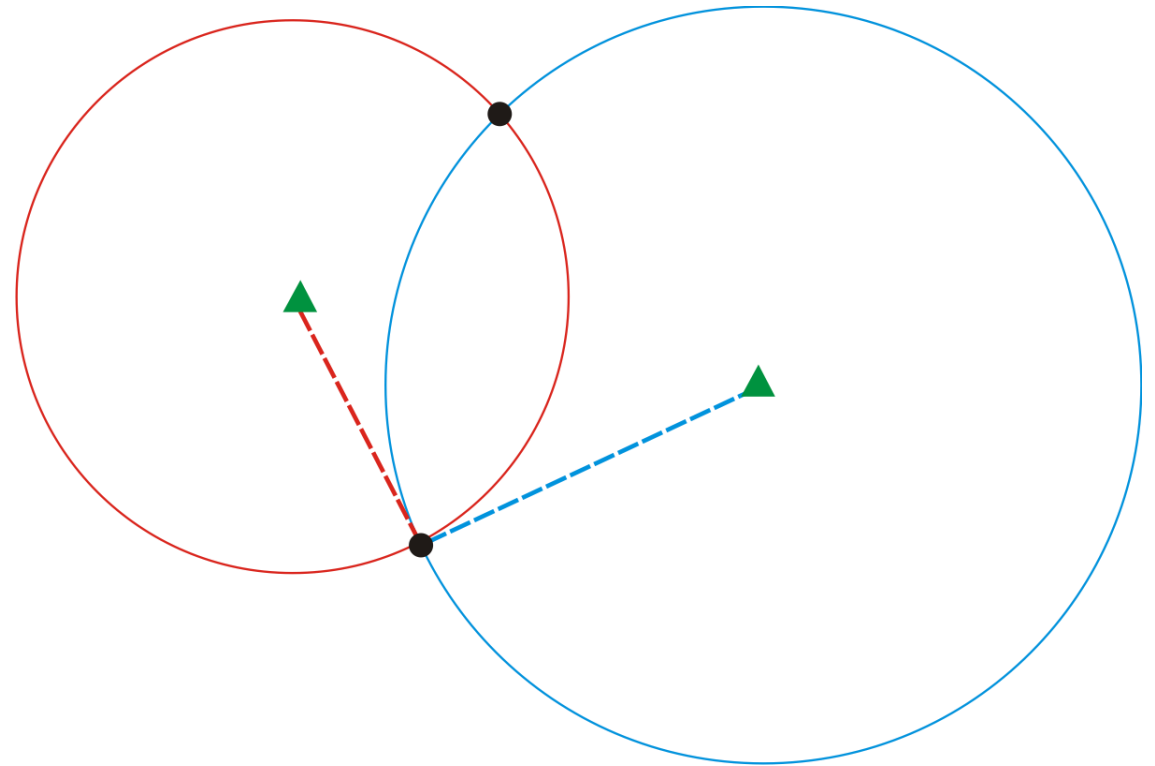
Possiamo determinare le coordinate di  $P$ ?

## Il problema nel piano - 2

---

Una misura di distanza equivale a mettere l'ago di un compasso nel punto noto e ad aprire il compasso di una quantità  $d_i$ .

Se determino la distanza da due punti noti, il punto cercato si troverà all'intersezione dei cerchi.



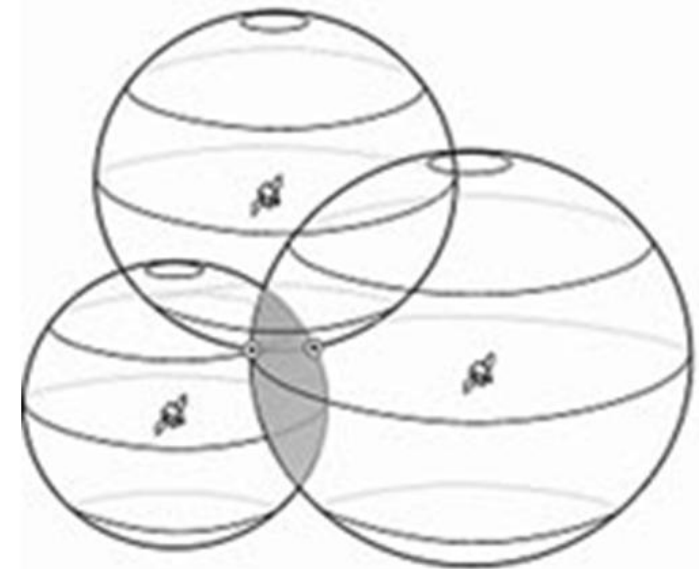
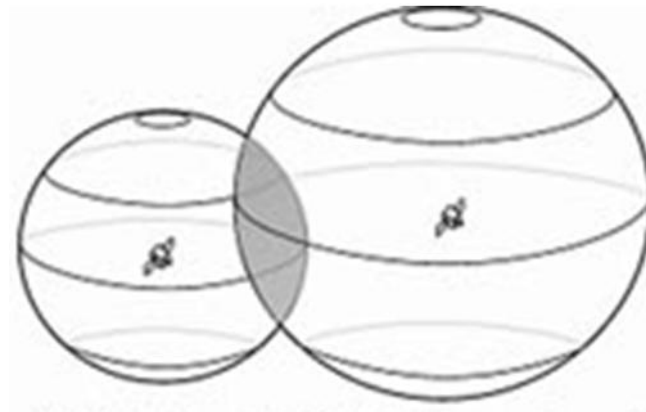
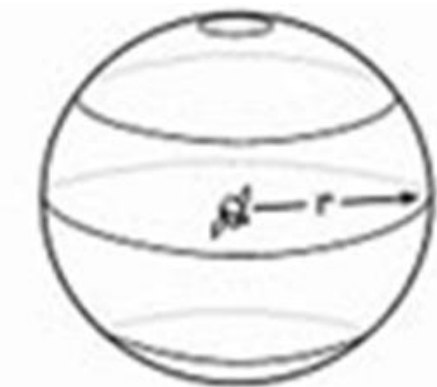
L'utilizzo di un terzo cerchio elimina, in modo automatico, l'ambiguità nella soluzione.

## Il problema nello spazio

---

Volendo generalizzare il concetto allo spazio, servono almeno 3 punti e la soluzione si trova all'intersezione delle sfere corrispondenti.

Anche in questo caso l'utilizzo di una quarta misura elimina in modo automatico l'ambiguità nella soluzione.



# Equazione del posizionamento satellitare - 1

Il posizionamento si fonda sulla relazione che lega:

- la posizione  $x_i$  dell'i-esimo punto incognito
- la posizione  $x^j$  del j-esimo satellite
- il vettore posizione  $r_i^j$  del satellite rispetto al punto

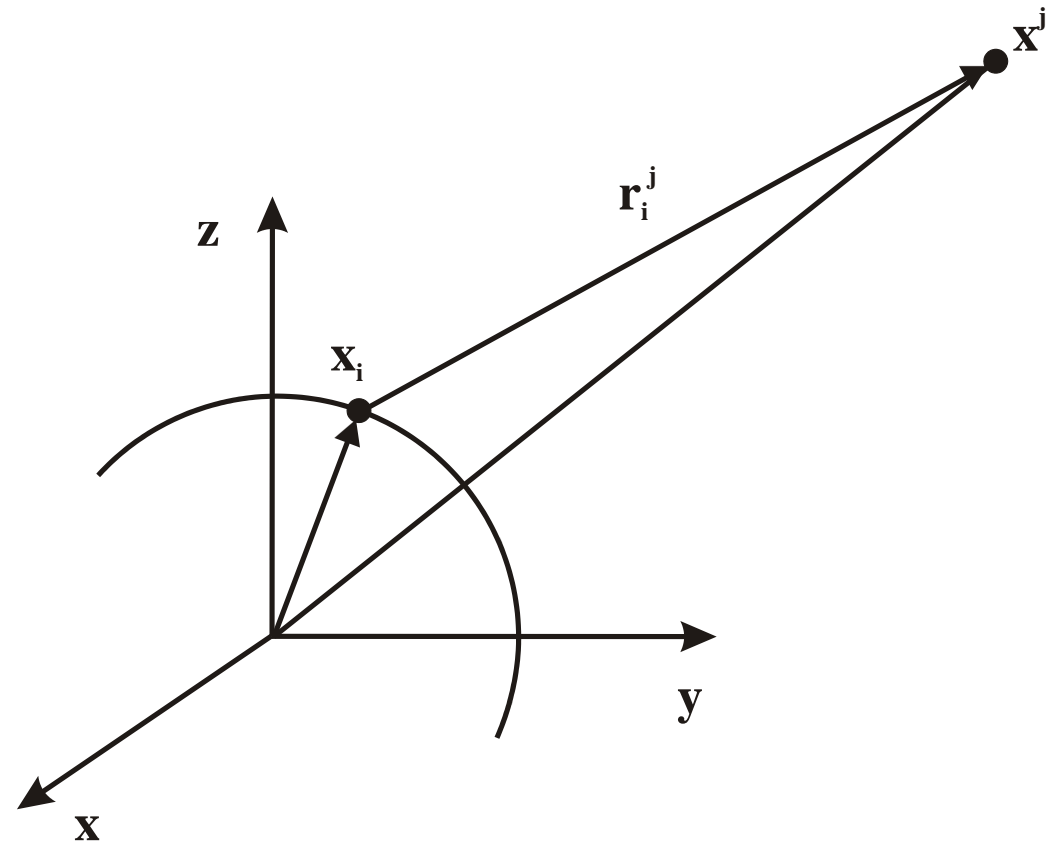
In particolare l'immagine mostra come:

$$x_i + r_i^j = x^j \quad (1)$$

da cui si ricava che:

$$r_i^j = x^j - x_i \quad (2)$$

NB - Sono relazioni vettoriali!



## Equazione del posizionamento satellitare - 2

---

Dalla relazione precedente (2) è facile ricavarne una seconda in cui invece che il vettore posizione del satellite  $j$  rispetto al ricevitore  $i$ , compare il suo modulo, cioè la distanza satellite-ricevitore:

$$r_i^j = \|x^j - x_i\| \quad (3)$$

Il posizionamento GPS è basato su questa espressione poiché la tecnologia GPS permette di determinare la distanza satellite-ricevitore e non direttamente il vettore che li unisce.

L'utilizzo della lettera  $r$  non è casuale ma deriva dal termine inglese *range* (distanza).

## Equazione del posizionamento satellitare - 3

---

Esaminando in dettaglio le componenti dell'equazione (3):

$$r_i^j = \|x^j - x_i\|$$

possiamo dire che:

- $x_i$  - posizione nel vertice stazionato, è l'incognita del problema (3 componenti)
- $x^j$  - posizione del generico satellite, è nota dalle effemeridi
- $r_i^j$  - distanza satellite ricevitore, è misurata dal ricevitore

Se si osservano  $s$  satelliti, si può scrivere un sistema di  $s$  equazioni del tipo:

$$r_i^j = \|x^j - x_i\| \quad j = 1, 2, \dots, s \quad (4)$$

e cercare di risolverlo rispetto a  $x_i$ . Sono evidentemente necessarie almeno 3 equazioni, dunque è necessario come minimo osservare altrettanti satelliti.

## Il concetto di tempo di volo

---

Come viene misurato il *range* (la distanza satellite-ricevitore)?

Il GPS è un sistema passivo per cui non può esserci nessun tipo di interazione tra i due elementi - satellite e ricevitore. Non è quindi ipotizzabile l'utilizzo di sistemi basati su di comunicazione in andata e ritorno.

Quello che in realtà è misurato è il tempo necessario ai segnali elettromagnetici, emessi dai satelliti e captati dai ricevitori, per percorrere tale distanza.

Il passaggio tra tale tempo e il *range* è "banale" ( $distanza = tempo \cdot velocità$ ).

Il tempo, definito tempo di volo, viene determinato utilizzando:

- i codici - codice C/A o codice P
- le fasi - portanti  $L_1$  ed  $L_2$



## Le misure di codice - 1

---

Vediamo come misurare il tempo di volo tramite misure di codice.

Facciamo un'ipotesi iniziale: l'orologio sul satellite e l'orologio nel ricevitore sono perfettamente sincroni tra di loro.

NB - Vedremo in seguito che tale ipotesi NON E' VERA!

Al momento, sotto questa ipotesi, è corretto affermare che satellite e ricevitore sono in grado di generare in modo perfettamente sincrono due copie dello stesso codice.

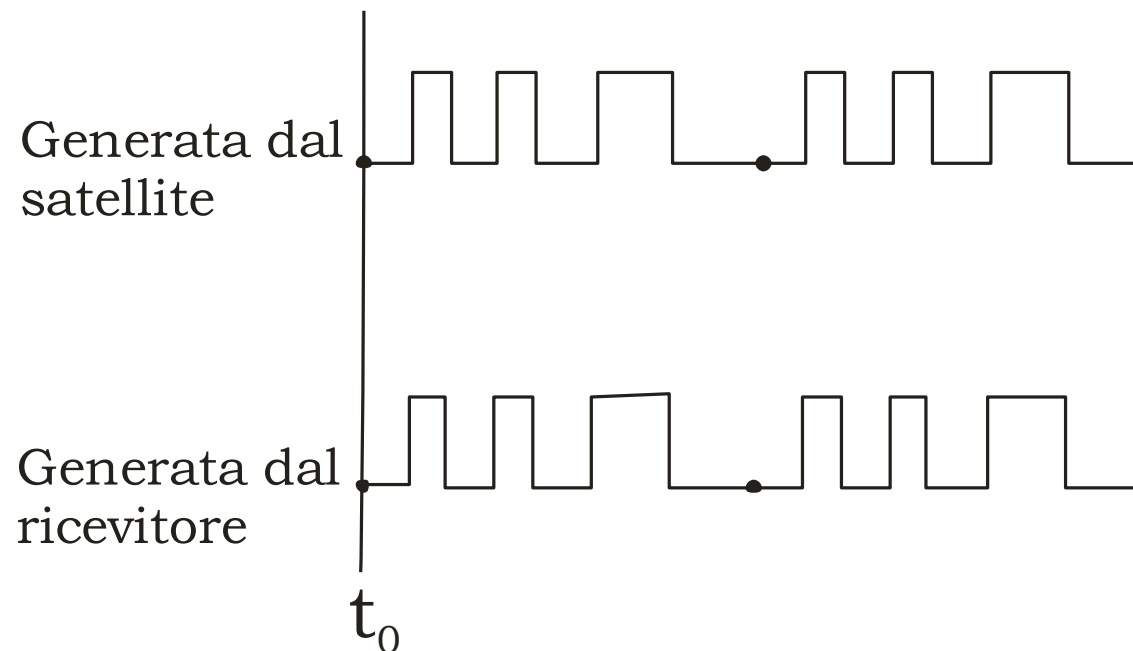
NB - Ricordo che i codici sono noti sia ai satelliti che ai ricevitori.

## Le misure di codice - 2

---

Supponiamo che al tempo  $t_0$ :

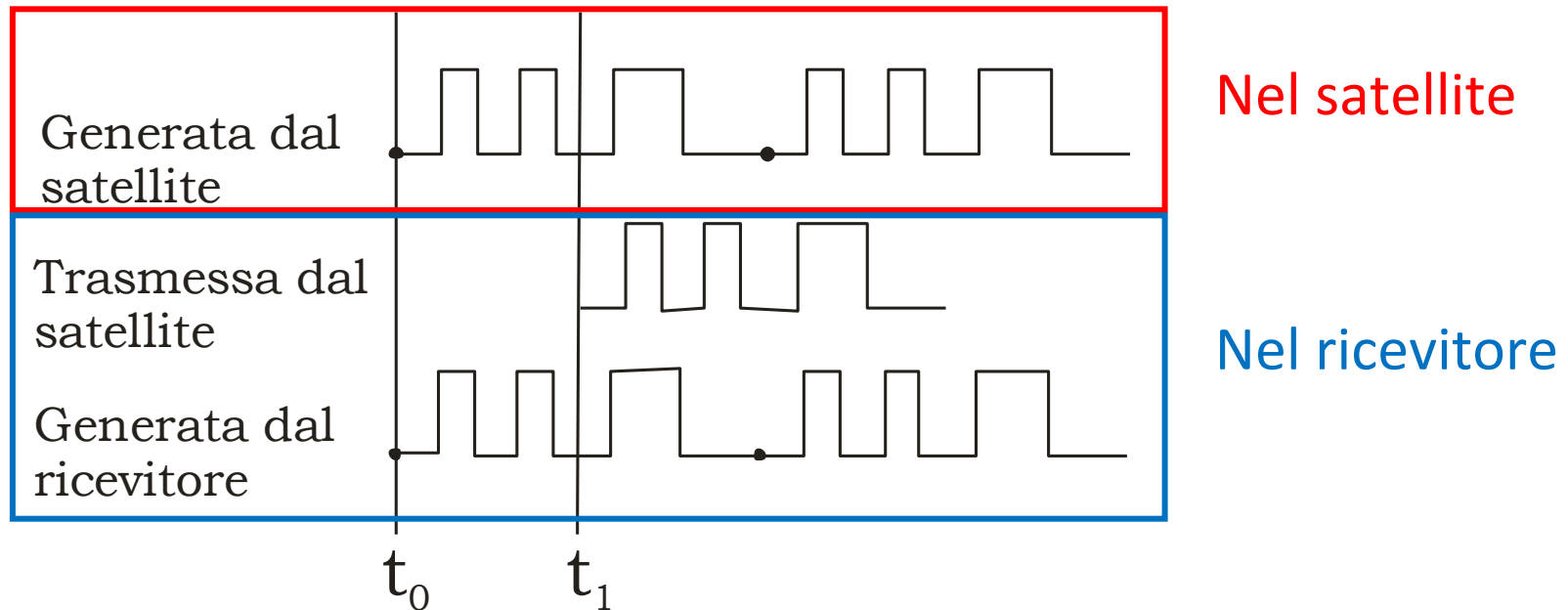
- il satellite generi un codice
- il ricevitore generi a sua volta il medesimo codice



Il satellite, oltre a generare il codice, lo invia anche verso Terra e quindi verso il ricevitore

## Le misure di codice - 3

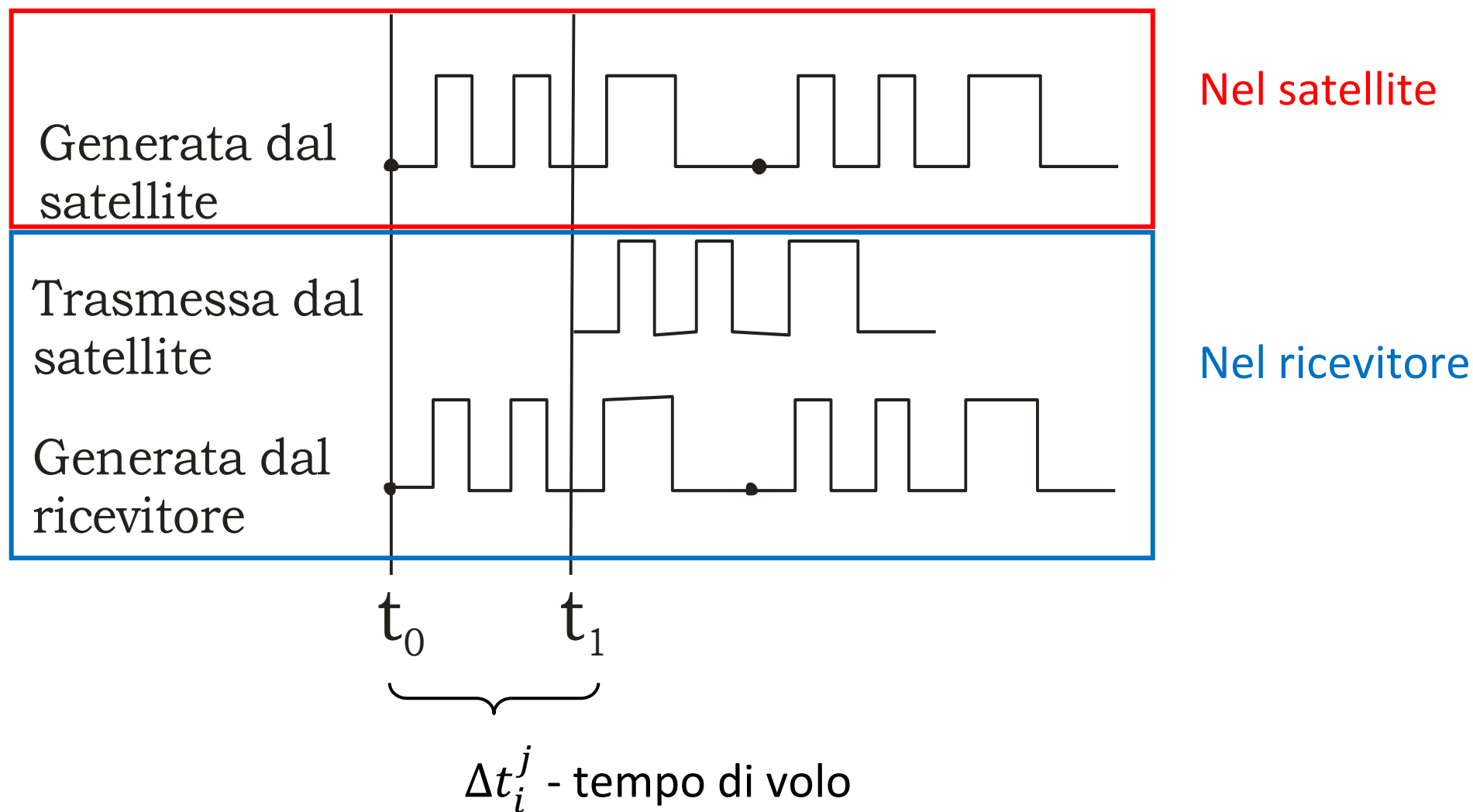
Ad un certo istante  $t_1$  il codice generato dal satellite sarà captato dal ricevitore.



Il segnale che arriva al ricevitore è sfasato poiché ha impiegato un certo tempo per percorrere la distanza satellite-ricevitore.

Misurare la sfasatura tra i due segnali presenti nel ricevitore equivale a determinare il tempo di volo  $\Delta t_i^j$ .

## Le misure di codice - 4



## Determinazione dello *pseudo-range* - 1

---

Quello descritto è il meccanismo usato dal GPS per determinare il tempo di volo  $\Delta t_i^j$ .

La misura dello sfasamento viene effettuata spostando sull'asse dei tempi la copia del segnale captata fino a quando questa coincide con la copia generata localmente dal ricevitore.

La traslazione necessaria ad allineare il codice generato con quello ricevuto coincide con il tempo di volo  $\Delta t_i^j$ .

La stima della distanza è una facile deduzione una volta fatta un'ipotesi sulla velocità di propagazione del segnale (*distanza = tempo · velocità*); tale velocità viene posta, in prima approssimazione uguale alla velocità della luce  $c$ .

$$r_i^j := \Delta t_i^j \cdot c \quad \text{dove } c = 2.998 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

## Determinazione dello *pseudo-range* - 2

---

Alcune considerazioni:

- ovviamente il segnale non viaggia alla velocità della luce poiché l'atmosfera non è vuota
- il tempo di volo misurato non coincide con il tempo di volo vero per una serie di fattori tra cui la non sincronia tra gli orologi coinvolti

In realtà quello che si riesce a misurare è una distanza approssimata che nella terminologia GPS viene indicato con il termine *pseudo-range*.

$$p_i^j := \Delta t_i^j \cdot c$$

E' corretto affermare che lo *pseudo-range* rappresenta una stima del *range*:

$$\hat{r}_i^j = p_i^j$$

## Posizionamento con misure di *pseudo-range*

---

E' possibile effettuare il posizionamento GPS con misure di *pseudo-range*? Si

L'espressione del posizionamento da utilizzare sarà quindi:

$$p_i^j = \Delta t_i^j \cdot c = \|x^j - x_i\| \quad j = 1, 2, \dots, s \quad (5)$$

Qual è la qualità (accuratezza) con cui vengono determinate le coordinate  $x_i$  del vertice stazionato?

In questa espressione semplificata, l'ipotesi di sincronizzazioni degli orologi, soprattutto in riferimento a quelli presenti all'interno dei ricevitori, rappresenta il limite più evidente.

## Sincronia degli orologi dei ricevitori - 1

---

Non è infrequente che l'orologio del ricevitore presenti scostamenti rispetto all'orologio atomico a bordo del satellite anche di 1 msec.

Tale scostamento, moltiplicato per la velocità della luce, corrisponde ad un errore nel calcolo della distanza satellite-ricevitore pari a 300 Km.

Utilizzare l'espressione (5), così come la vedete scritta, comporta introdurre errori anche di 300 Km, nella misura di *pseudo-range* verso qualsiasi satellite osservato.



## Sincronia degli orologi dei ricevitori - 2

---

Come posso migliorare la misura di *pseudo-range*?

Occorre modificare l'espressione (5) introducendo come termine incognito anche lo sfasamento dell'orologio del ricevitore.

Le incognite finali del nostro posizionamento saranno pertanto quattro:

- la posizione tridimensionale del punto da rilevare (3 incognite)
- lo sfasamento dell'orologio del ricevitore (1 incognita)

Per poter arrivare ad una soluzione è necessario osservare il segnale di ***almeno 4 satelliti!***