Marica Franzini
Laboratorio di Geomatica - DICAr
Università di Pavia
email: marica.franzini@unipv.it

Principi di posizionamento

Prima Parte

Il problema nel piano - 1

Il posizionamento GNSS si basa essenzialmente sulla capacità, da parte dei ricevitore, di determinare la posizione del vertice occupato con misure di sola distanza con una tecnica chiamata “intersezione spaziale di tipo distanziometrico”.

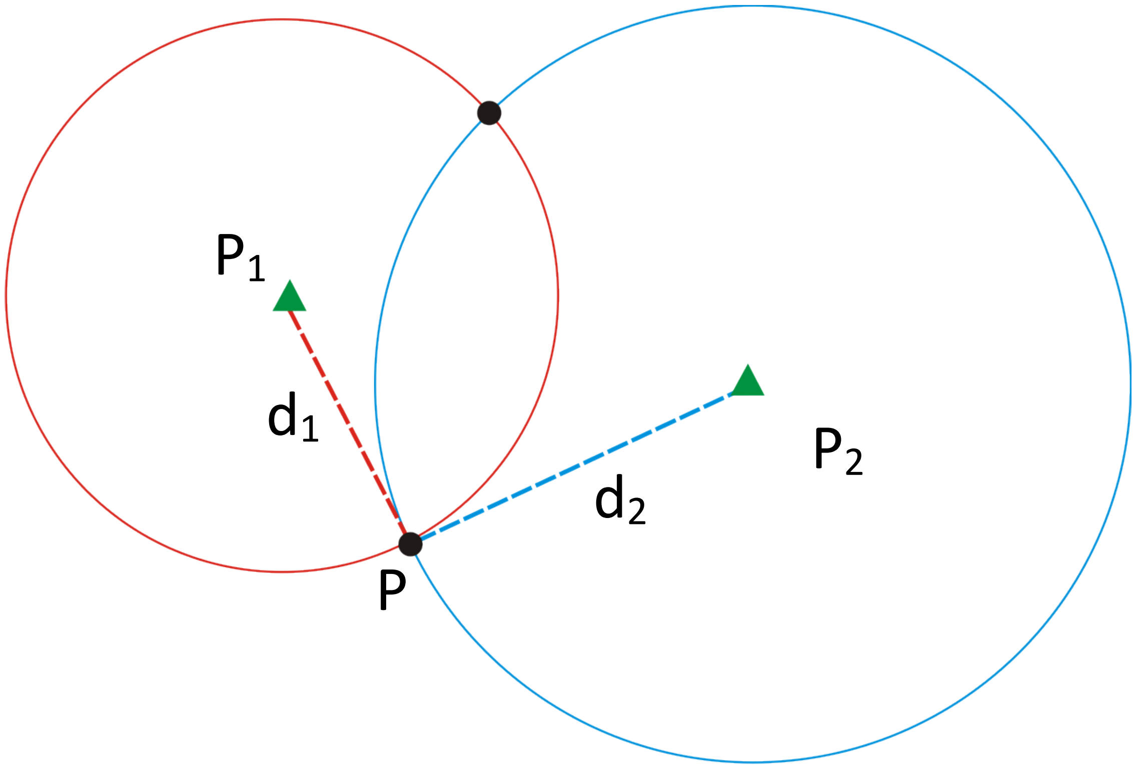
Le distanze misurate devono essere effettuate verso punti di coordinate note e, nel caso del GNSS, i punti di coordinate note sono i satelliti. La distanza presa in considerazione è quindi la distanza satellite-ricevitore.

Proviamo anzitutto a ragionare, per semplicità, nel piano.

Abbiamo un insieme di punti di coordinate note P_i e un punto incognito P.
Sappiamo misurare le distanze d_i fra i punti P_i e quello incognito P.
Possiamo determinare le coordinate di P?

Il problema nel piano - 2

Una misura di distanza equivale a mettere l'ago di un compasso nel punto noto e ad aprire il compasso di una quantità d_i.



Se determino la distanza verso più punti, il punto cercato si troverà all'intersezione dei cerchi.

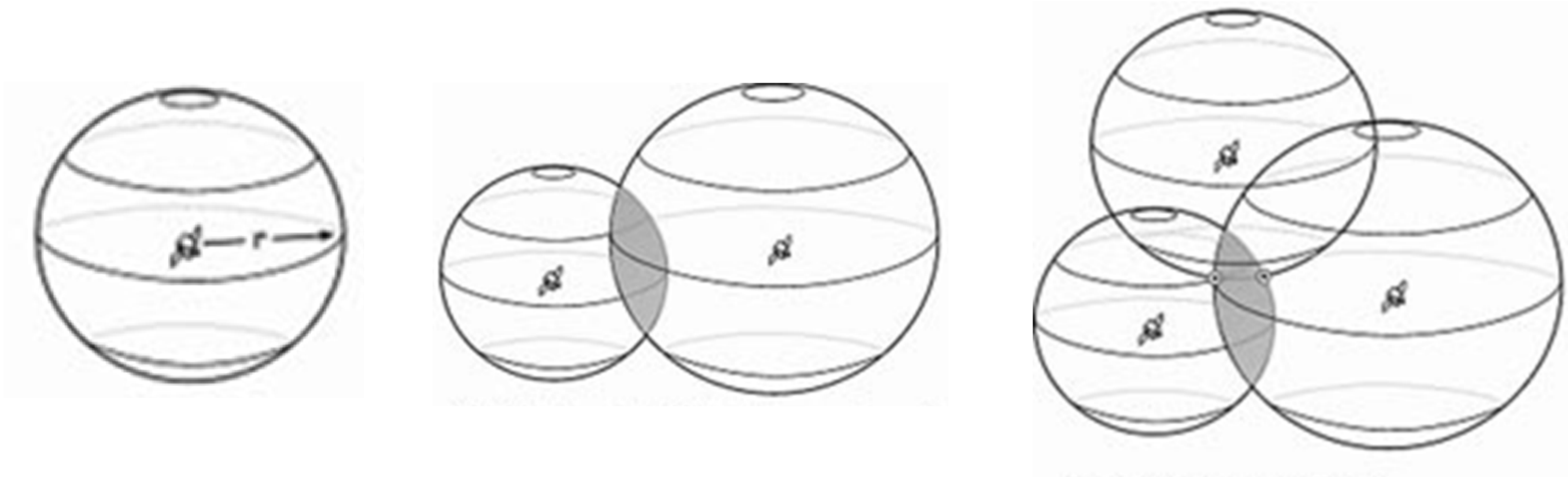
Per risolvere il problema servono almeno due cerchi: l'indeterminazione viene risolta ragionando sulla posizione relativa dei punti (dal punto P che punto noto osservo a desta o sinistra?).

L'utilizzo di un terzo cerchio elimina, in modo automatico, l'ambiguità nella soluzione.

Il problema nello spazio

Volendo generalizzare il concetto allo spazio, servono almeno 3 punti e la soluzione si trova all'intersezione delle sfere corrispondenti.

Anche in questo caso l'utilizzo di una quarta misura elimina in modo automatico l'ambiguità nella soluzione.



Il principio di posizionamento GNSS – 1

Come già introdotto, il sistema di riferimento a cui si riferiscono le coordinate, è un sistema geocentrico solidale alle Terra o ECEF (Earth Centered Earth Fixed).

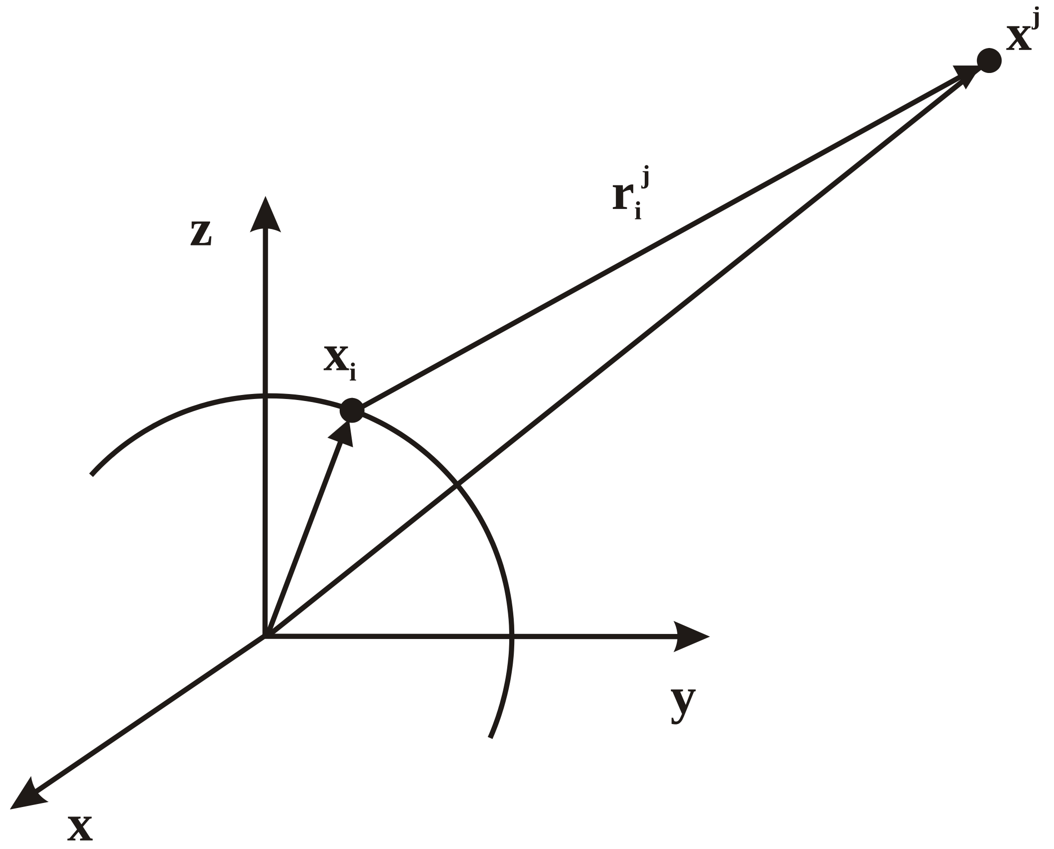
Ogni costellazione GNSS ha il proprio sistema ma i principi su cui si base il posizionamento sono i medesimi.

Supposte note le posizioni dei satelliti in quel sistema di riferimento, le coordinate incognite del vertice i sono legate alle coordinate note dei satellite j tramite la misura di un numero sufficiente di *range* ovvero di distante tra satelliti e ricevitore.

Equazione del posizionamento satellitare - 1

Il posizionamento si fonda sulla relazione che lega:

- la posizione x_i dell'i-esimo punto incognito
- la posizione x^j del j-esimo satellite
- il vettore posizione r_i^j del satellite rispetto al punto



In particolare l'immagine mostra come:

$$x_i + r_i^j = x^j \qquad (1)$$

da cui si ricava che:

$$r_i^j = x^j - x_i \qquad (2)$$

NB - Sono relazioni vettoriali!

Equazione del posizionamento satellitare - 2

Dalla relazione precedente (2) è facile ricavarne una seconda in cui invece che il vettore posizione del satellite j rispetto al ricevitore i, compare il suo modulo, cioè la distanza satellite-ricevitore:

$$r_i^j(t) = \left\| x^j(t) - x_i \right\| \qquad (3)$$

Il posizionamento GNSS è basato su questa espressione poiché le tecnologia permette di determinare la distanza satellite-ricevitore e non direttamente il vettore che li unisce.

L'utilizzo della lettera r non è casuale ma deriva dal termine inglese *range* (distanza).

Equazione del posizionamento satellitare - 3

Esaminando in dettaglio le componenti dell'equazione (3):

$$r_i^j(t) = \left\| x^j(t) - x_i \right\|$$

possiamo dire che:

- x_i - posizione 3D nel vertice stazionato, è l'incognita del problema
- $x^j(t)$ - posizione del generico satellite, è nota dalle effemeridi
- $r_i^j(t)$ - distanza satellite ricevitore, è misurata dal ricevitore

L'introduzione del fattore temporale nelle equazioni vuole sottolineare che le distanze misurate - $r_i^j(t)$ – non sono costanti ma variano in funzione del tempo in quanto variano le posizioni dei punti noti – le effemeridi dei satelliti $x^j(t)$.
Se il ricevitore rimante fermo sul punto da rilevare, x_i rimane costante per tutta la fase del rilievo: le incognite saranno pertanto 3.

Equazione del posizionamento satellitare – 4

Se si osservano s satelliti, si può scrivere un sistema di s equazioni del tipo:

$$r_i^j(t) = \left\| x^j(t) - x_i \right\| \quad j = 1,2,\ldots,s \tag{4}$$

e cercare di risolverlo rispetto a x_i.

Sono evidentemente necessarie almeno 3 equazioni, dunque è necessario, come minimo, osservare altrettanti satelliti.

Volendo esplicitare il range geometrico è possibile scrivere:

$$r_i^j(t) = \sqrt{(x^j(t) - x_i)^2 + (y^j(t) - y_i)^2 + (z^j(t) - z_i)^2} \quad j = 1,2,\ldots,s$$

Modalità di posizionamento - 1

Il posizionamento GNSS può essere eseguito in varie modalità:

- Posizionamento assoluto: le coordinate di un vertice sono determinate in un sistema di riferimento assoluto
- Posizionamento relativo: vengono determinate le componenti del vettore *baseline* che unisce due vertici. In questa modalità si eliminano o si riducono errori sistematici (*bias*) da cui è affetto il *range*
- Posizionamento differenziale: simile al posizionamento assoluto ma eseguito correggendo il *range* satellite-ricevitore con una correzione calcolata da un secondo ricevitore. Come nel posizionamento relativo vengono eliminati o ridotti vari errori.

Modalità di posizionamento – 2

Le misure GNSS possono essere:

- Statiche: si pemane sui punti per un certo tempo
- Cinematiche: il ricevitore è in continuo movimento

Può essere eseguito:

- In post-elaborazione: vengono elaborati i dati dopo l'acquisizione nelle varie stazioni (es. posizionamento relativo)
- In tempo reale: la posizione è direttamente disponibile in campagna (es. posizionamento assoluto e differenziale)

In tutti i casi il problema è determinare la distanza satellite-ricevitore e questo può essere effettuato con misure di codice o di fase.

Il concetto di tempo di volo

Come viene misurato il *range* (la distanza satellite-ricevitore)?

I GNSS sono sistemi passivi per cui non può esserci nessun tipo di interazione tra i due elementi - satellite e ricevitore. Non è quindi ipotizzabile l'utilizzo di sistemi basati su di comunicazione in andata e ritorno.

Quello che in realtà è misurato è il tempo necessario ai segnali elettromagnetici, emessi dai satelliti e captati dai ricevitori, per percorrere tale distanza.

Il passaggio tra tale tempo e il *range* è immediato:

$$distanza = tempo \cdot velocit\grave{a}$$

Tale tempo, definito tempo di volo, può essere determinato utilizzando:

- la componenti impulsiva: nel caso GPS i codici C/A, P e L_2C
- la componenti portale: nel GPS le portanti L_1, L_2 ed L_5

1 - Posizionamento con misure di codice

Le misure di codice - 1

Vediamo anzitutto come misurare il tempo di volo tramite misure di codice.

Per semplificare la trattazione, facciamo un'ipotesi iniziale: l'orologio sul satellite e l'orologio nel ricevitore sono perfettamente sincroni tra di loro e con il tempo GPS (scandito alla Mater station).
Vedremo in seguito che tale ipotesi - NON VERA - dovrà essere rimossa.

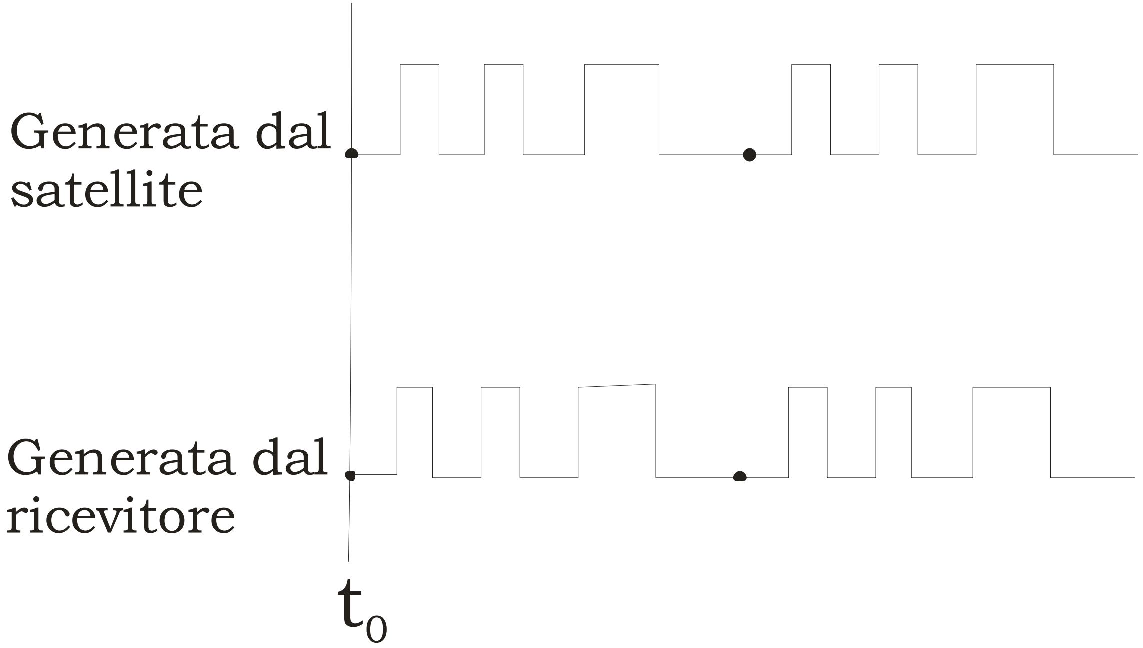
Al momento, sotto questa ipotesi, è corretto affermare che satellite e ricevitore sono in grado di generare in modo perfettamente sincrono due copie dello stesso codice.

Molto importante: questo è possibile poiché i codici PRN sono noti sia ai satelliti che ai ricevitori.

Le misure di codice - 2

Supponiamo che al tempo t_0:

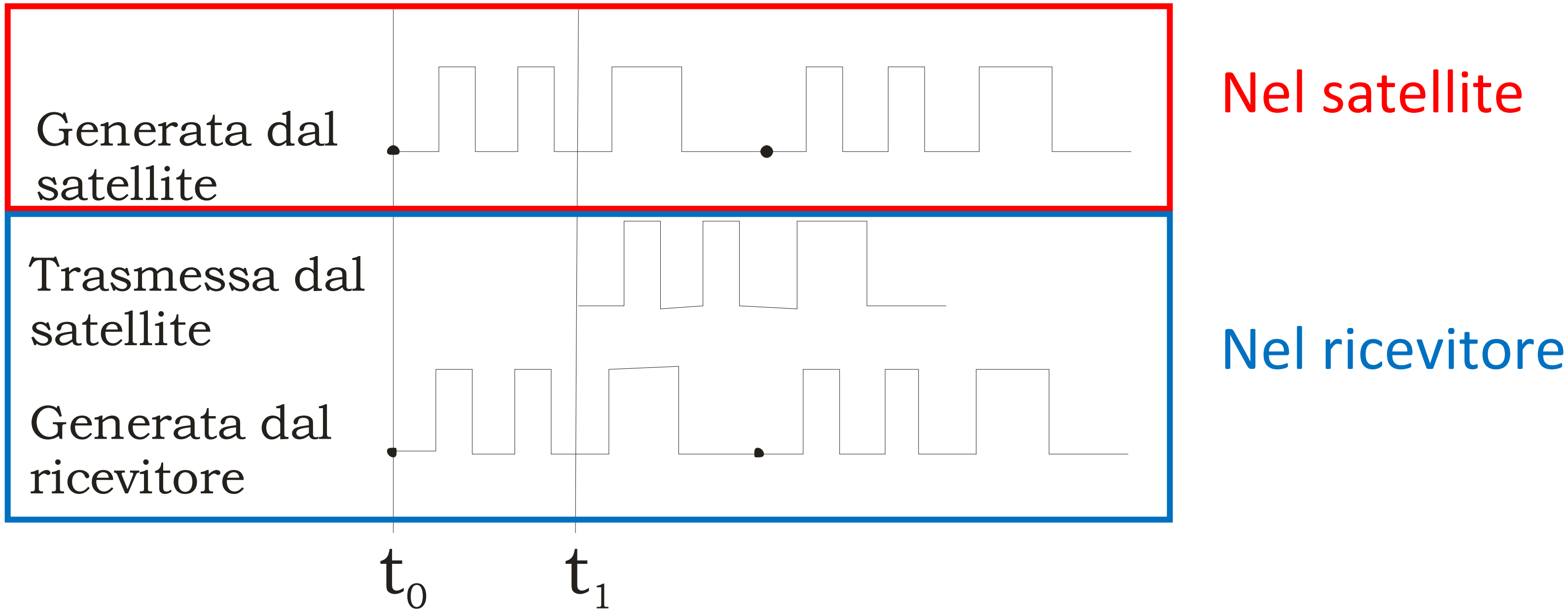
- il satellite generi un codice
- il ricevitore generi a sua volta il medesimo codice



Il satellite, oltre a generare il codice, lo invia anche verso Terra e quindi verso il ricevitore.

Le misure di codice - 3

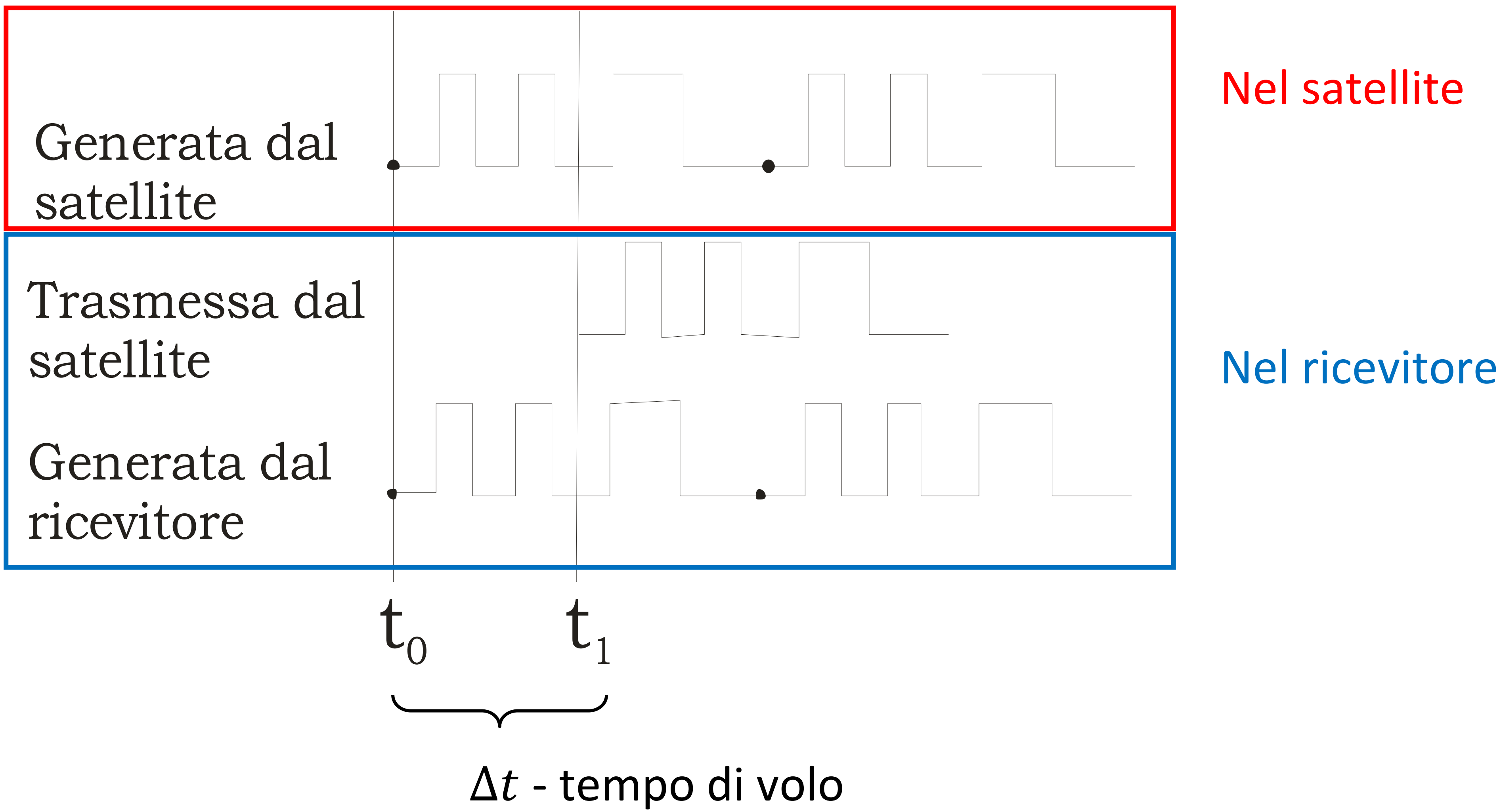
Ad un certo istante t_1 il codice generato dal satellite sarà captato dal ricevitore.



Il segnale che arriva al ricevitore è sfasato poiché ha impiegato un certo tempo per percorrere la distanza satellite-ricevitore.

Misurare la sfasatura tra i due segnali presenti nel ricevitore equivale a determinare il tempo di volo Δt.

Le misure di codice - 4



Le misure di codice - 5

Quello descritto è proprio il meccanismo usato dal GPS per determinare le distanze satellite-ricevitore facendo uso dei codici.

La misura dello sfasamento viene effettuata spostando sull'asse dei tempi la copia del segnale captata fino a quando questa coincide con la copia generata localmente dal ricevitore.

La traslazione necessaria ad allineare il codice generato con quello ricevuto coincide con il tempo di volo Δt.

Le misure di codice - 6

Le fasi prese in considerazione sono distinte solo da un punto di vista logico ma sono continuamente sovrapposte sul piano temporale durante il periodo di accensione di un ricevitore GPS.

In altri termini, subito dopo l'accensione di un ricevitore avviene qualcosa di analogo a quanto descritto, ma l'intervallo Δt determinato non è certo qualcosa di statico in quanto satellite e ricevitore sono in moto relativo e la loro distanza cambia continuamente.

Ciò che fa il ricevitore è esaminare di continuo il codice captato e rideterminare di conseguenza il tempo di volo Δt in modo che il codice captato e quello generato siano allineati: si dice che il ricevitore tiene agganciato il satellite e questa operazione si chiama *tracking*.

Concetto di epoca

Quante volte viene effettuata la misura del tempo di volo Δt?

Una sola volta? In generale NO.

La maggior parte delle tecniche di posizionamento GPS sono basate su una grande ridondanza, dunque la misura della distanza satellite-ricevitore viene rideterminata in continuo e memorizzata ad intervalli predefiniti detti *epoche*.

Epoca: intervallo fra due misure di *range*.

Tipicamente, per le applicazioni topografiche, si fissano epoche tra 1 e 30 secondi. I ricevitori moderni arrivano a misurare fino a un decimo di secondo (settaggio solitamente non usato per misure di tipo topografico ma piuttosto per il tracciamento di veicoli in movimento).

Determinazione della range - 1

Quello descritto è il meccanismo usato dal GPS per determinare il tempo di volo Δt_i^j tra il generico satellite j ed il ricevitore i.

La stima della distanza è una facile deduzione una volta fatta un'ipotesi sulla velocità di propagazione del segnale ($distanza = tempo \cdot velocit$à); tale velocità viene posta, in prima approssimazione uguale alla velocità della luce c.

In forma analitica:

$$r_i^j(t) = \Delta t_i^j \cdot c \qquad (5)$$

dove $c = 2.998 \cdot 10^8 m/s$

Determinazione della range - 2

Osservando l'espressione appena scritta:

$$r_i^j(t) = \Delta t_i^j \cdot c$$

possiamo osservare che:

- il segnale non viaggia alla velocità della luce poiché l'atmosfera non è vuota
- il tempo di volo misurato non coincide con il tempo di volo vero

Queste considerazioni e la presenza di altre fonti di errore fa si che in realtà quello che si riesce a misurare è una distanza approssimata che nella terminologia GPS viene indicato con il termine *pseudo-range*.

E' corretto affermare che lo *pseudo-range* rappresenta una stima del *range*:

$$\hat{r}_i^j\,(t) = p_i^j(t)$$

2 - Sfasamento degli orologi

Sfasamento degli orologi

Affrontiamo anzitutto il problema dello sfasamento degli orologi.

Possiamo considerare tre scale temporali coinvolte:

1. Scala di tempo atomico (t_a) che si assume come riferimento fondamentale e mantenuta dal centro di controllo di Colorado Springs
2. Scala di tempo del satellite (t^j) mantenuta degli orologi atomici presenti a bordo dei satelliti
3. Scala di tempo del ricevitore (t_i) mantenuta dall'orologio interno del ricevitore – generalmente al quarzo

Le scale temporali dei satelliti e dei ricevitori possono essere allineate a quella fondamentale t_a considerando gli offset presenti tra esse.

Modellizzazione degli errori d'orologio – 1

In particolare indichiamo con:

- δt^j: lo sfasamento dell’orologio del satellite rispetto alla scala temporale fondamentale t_a
- δt_i : lo sfasamento dell’orologio del ricevitore rispetto alla scala temporale fondamentale t_a

Essi rappresentano degli errori sistematici – bias – nell’equazione dello pseudorange (5) così come è stata scritta.

E’ possibile correggere tale equazione esplicitando i fattori correttivi appena introdotti.

Modellizzazione degli errori d'orologio – 2

$$r_i^j(t) = \Delta t_i^j \cdot c \quad j = 1,2,\dots,s$$

$$\begin{aligned} r_i^j = \Delta t_i^j \cdot c &= \left[\left(t^j + \delta t^j\right) - (t_i - \delta t_i)\right] \cdot c \\ &= \left[\left(t^j - t_i\right) + \delta t^j - \delta t_i\right] \cdot c \\ &= \left[\Delta t_i^j + \delta t^j - \delta t_i\right] \cdot c \\ &= p_i^j + (\delta t^j \cdot c) - (\delta t_i \cdot c) \end{aligned}$$

Convenzionalmente le correzioni per gli offset vengono applicate in segno opposto:

- Positivo per l’offset del satellite
- Negativo per l’offset del ricevitore

Modellizzazione degli errori d'orologio – 3

Chi ci fornisce i termini di errore δt_i e δt^j relativi agli sfasamenti degli orologi sui satelliti e nei ricevitori?

- il termine δt^j è stimato dal segmento di controllo e fornito agli utenti finali all'interno del messaggio navigazionale
- il termine δt_i deve essere considerato come un incognita del problema al pari delle coordinate del vertice stazionato

Modellizzazione degli errori d'orologio – 4

Ricordando che il valore presente nel messaggio navigazionale è una stima dello <u>sfasamento dell'orologio del satellite</u>, qual è l'entità dell'eventuale errore residuo nella misura della distanza satellite-ricevitore?

Lo sfasamento residuo è dell'ordine di 1 ns (10^{-9} secondi); questo valore, moltiplicato per la velocità della luce, porta ad un errore nel calcolo della distanza di circa 30 cm.

Modellizzazione degli errori d'orologio – 5

Non potendo modellizzare lo sfasamento dell'orologio del ricevitore, qual è l'entità dell'errore commesso nella misura della distanza se trascurassi tale fenomeno?

Non è infrequente che l'orologio del ricevitore presenti scostamenti anche di 1 ms (10^{-3} secondi).
Tale scostamento, moltiplicato per la velocità della luce, corrisponde ad un errore nel calcolo della distanza satellite-ricevitore pari a 300 Km.

Si considera allora incognito l'errore dell'orologio del ricevitore δt_i ad ogni epoca di misura.

Soluzione navigazionale di codice - 1

Separando incognite e termini noti, l'equazione di **pseudorange di codice** sarà:

$$p_i^j + (\delta t^j \cdot c) = r_i^j - (\delta t_i \cdot c)$$

Dove:

- p_i^j: è la distanza effettivamente misurata - noto
- $(\delta t^j \cdot c)$: è l'offset dell'orologio del satellite – noto
- r_i^j: è la distanza geometrica vera contenente le coordinate del punto – 3 incognite
- $(\delta t_i \cdot c)$: è l'offset dell'orologio del ricevitore – 1 incognita

Il sistema va risolto introducendo un adeguato numero di equazioni (osservazioni) rispetto al numero delle incognite.

Bilancio equazioni incognite nella soluzione navigazionale - 1

n_s – numero satelliti in vista

n_e – numero di epoche di misura

Numero di equazioni (considerando costante il numero di satelliti): ho un'equazione per ogni satelliti in vista per ogni epoca di misura

$$numero\ equazioni = n_s \cdot n_e$$

Bilancio equazioni incognite nella soluzione navigazionale - 2

RILIEVO STATICO: si pemane fermi sui punti da rilevare

Numero di incognite: ho le coordinate tridimensionali del vertice stazionato e la stima dello sfasamento dell'orologio del ricevitore per ogni epoca di misura

$$numero\ incognite = 3 + n_e$$

Condizione per la soluzione (numero di equazioni maggiore o uguale al numero delle incognite):

$$n_s \cdot n_e \geq 3 + n_e$$

Risolviamo il sistema considerando il numero di satelliti necessari per effettuare posizionamento con un epoca di misura:

$$n_s \geq \frac{3+n_e}{n_e}$$

Se $n_3 = 1$ allora $n_s \geq 4$.

Bilancio equazioni incognite nella soluzione navigazionale – 3

RILIEVO CINEMATICO: il ricevitore è in continuo movimento

Numero di incognite: sia le coordinate tridimensionali del vertice che la stima dello sfasamento dell'orologio del ricevitore cambiano ad ogni epoca di misura

$$numero\ incognite = \ 3n_e + n_e = 4n_e$$

Condizione per la soluzione (numero di equazioni maggiore o uguale al numero delle incognite):

$$n_s \cdot n_e \geq 4n_e$$

Risolviamo il sistema considerando il numero di satelliti necessari per effettuare posizionamento con un epoca di misura:

$$n_s \geq \frac{4n_e}{n_e}$$

Per $\forall\, n_e :\ n_s \geq 4.$