



**Marica Franzini**

**Laboratorio di Geomatica - DICAr**

**Università di Pavia**

**email: [marica.franzini@unipv.it](mailto:marica.franzini@unipv.it)**



# Principi di posizionamento

Seconda Parte

## Equazione di pseudo-range

---

Nella lezione precedente eravamo arrivati a scrivere l'equazione del *range* nella forma:

$$\hat{r}_i^j = \Delta t_i^j \cdot c = \|x^j - x_i\| \quad j = 1, 2, \dots, s$$

Ora dobbiamo modificare l'espressione analitica in modo che compaiano espressamente i termini legati allo sfasamento temporale degli orologi dei ricevitori.

# Modellizzazione degli errori d'orologio - 1

---

Consideriamo:

- i tempi misurati in cui il segnale viene emesso e captato,  $\tau^j$  e  $\tau_i$
- i tempi veri in cui il segnale viene emesso e captato,  $t^j$  e  $t_i$

Precisamente:

- $\tau^j$ : istante in cui un segnale lascia il satellite  $j$ , misurato dall'orologio del satellite
- $t^j$ : istante vero in cui un segnale lascia il satellite  $j$ , misurato dall'orologio GPS (tempo GPS vero)
- $\tau_i$ : istante in cui un segnale raggiunge il ricevitore  $i$ , misurato dall'orologio del ricevitore
- $t_i$ : istante vero in cui un segnale raggiunge il ricevitore  $i$ , misurato dall'orologio GPS (tempo GPS vero)

## Modellizzazione degli errori d'orologio - 2

---

Introduciamo allora i termini d'errore:

$$\tau^j + \delta\tau^j = t^j$$

$$\tau_i + \delta\tau_i = t_i$$

Il tempo di volo misurato (istante di ricezione – istante di emissione) sarà:

$$\Delta\tau_i^j = \tau_i - \tau^j$$

mentre il tempo di volo vero sarà:

$$\Delta t_i^j = t_i - t^j$$

Sostituendo:

$$\Delta t_i^j = \tau_i + \delta\tau_i - (\tau^j + \delta\tau^j) = \tau_i - \tau^j + \delta\tau_i - \delta\tau^j = \Delta\tau_i^j + \delta\tau_i - \delta\tau^j$$

## Nuova equazione

---

$$\hat{r}_i^j = \Delta t_i^j \cdot c \quad j = 1, 2, \dots, s$$

$$\begin{aligned}\hat{r}_i^j &= \Delta t_i^j \cdot c = (\Delta \tau_i^j + \delta \tau_i - \delta \tau^j) \cdot c \\ &= \Delta \tau_i^j \cdot c + (\delta \tau_i - \delta \tau^j) \cdot c \\ &= p_i^j + (\delta \tau_i - \delta \tau^j) \cdot c\end{aligned}$$

Chi ci fornisce i termini di errore  $\delta \tau_i$  e  $\delta \tau^j$  relativi agli sfasamenti degli orologi sui satelliti e nei ricevitori?

- il termine  $\delta \tau^j$  (piccolo) è stimato dal segmento di controllo e fornito agli utenti finali all'interno del messaggio navigazionale D
- il termine  $\delta \tau_i$  deve essere considerato come un'incognita del problema al pari delle coordinate del vertice stazionato

## Modellizzazione degli errori dovuti alla velocità di propagazione - 1

La velocità di propagazione media è minore di  $c$  poiché il segnale emesso dai satelliti non viaggia nel vuoto ma all'interno dell'atmosfera. Poiché la velocità reale è minore rispetto a quella teorica, introducendo il valore  $c$ , si avrà che la distanza satellite-ricevitore misurata è maggiore rispetto a quella reale.

Per tenere conto di questa fonte di errore devono essere introdotti dei fattori correttivi che migliorano la stima della distanza satellite-ricevitore; tra tutti gli strati atmosferici quelli più importanti, perché influenzano maggiormente il segnale, sono la ionosfera e la troposfera.

Vengono quindi introdotti due nuovi fattori legati al ritardo che il segnale subisce attraversando questi due strati.

La nuova equazione sarà:

$$\hat{r}_i^j = p_i^j + (\delta\tau_i - \delta\tau^j) \cdot c - I_i^j - T_i^j$$

## Modellizzazione degli errori dovuti alla velocità di propagazione - 2

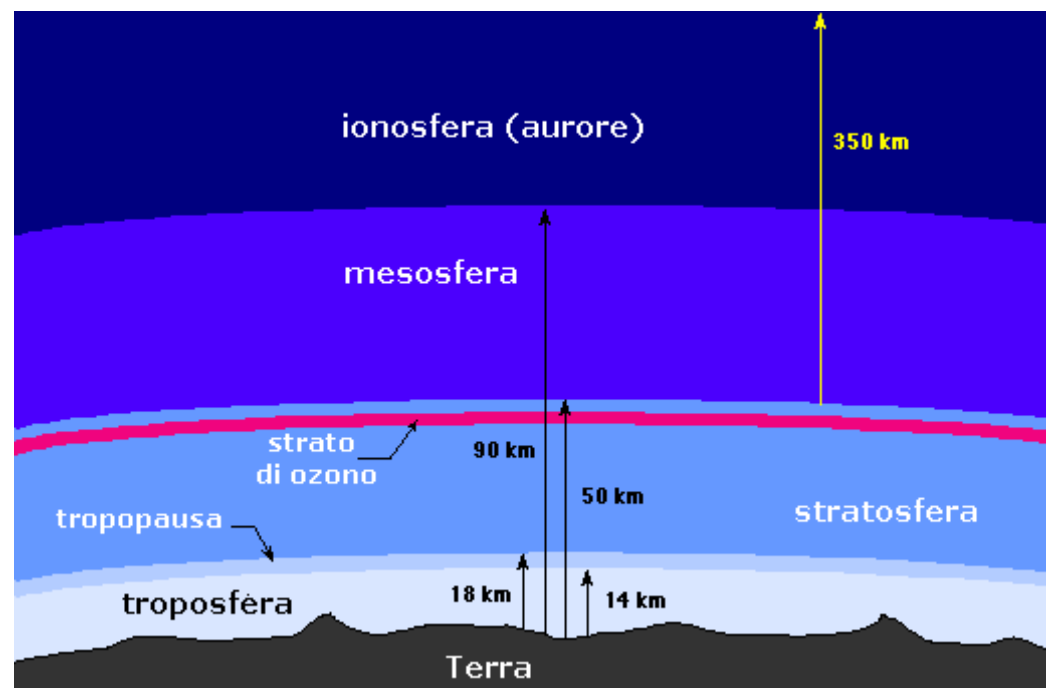
Ionosfera: parte alta dell'atmosfera

Troposfera: parte bassa

I meccanismi fisici che determinano il ritardo nei due strati sono differenti e, conseguentemente, le strategie per eliminare tali errori sono diverse; ciò spiega come mai si introducano i due termini separatamente.

In linea di principio  $I_i^j$  e  $T_i^j$  sono diversi per ogni satellite e per ogni ricevitore, in quanto dipendono dalle condizioni chimico-fisiche della parte di atmosfera attraversata.

Esamineremo meglio in seguito queste due fonti di errore.



## Sintesi sulle stime del *range*

---

Prima equazione approssimata:

$$\hat{r}_i^j = p_i^j \quad j = 1, 2, \dots, s$$

Tenendo conto del fattore orologi:

$$\hat{r}_i^j = p_i^j + (\delta\tau_i - \delta\tau^j) \cdot c \quad j = 1, 2, \dots, s$$

Tenendo conto del ritardo iono-troposferico:

$$\hat{r}_i^j = p_i^j + (\delta\tau_i - \delta\tau^j) \cdot c - I_i^j - T_i^j \quad j = 1, 2, \dots, s$$



## Equazione di *pseudo-range* con i codici

---

La soluzione del posizionamento GPS viene ottenuta utilizzando come stima del *range* l'ultima equazione riportata denominata anche come equazione di *pseudo-range*

$$r_i^j = \|\vec{x}^j - \vec{x}_i\| \quad j = 1, 2, \dots, s$$

$$p_i^j + (\delta\tau_i - \delta\tau^j) \cdot c - I_i^j - T_i^j = \|\vec{x}^j - \vec{x}_i\| \quad j = 1, 2, \dots, s$$

Da cui:

$$p_i^j = \|\vec{x}^j - \vec{x}_i\| - (\delta\tau_i - \delta\tau^j) \cdot c + I_i^j + T_i^j \quad j = 1, 2, \dots, s$$

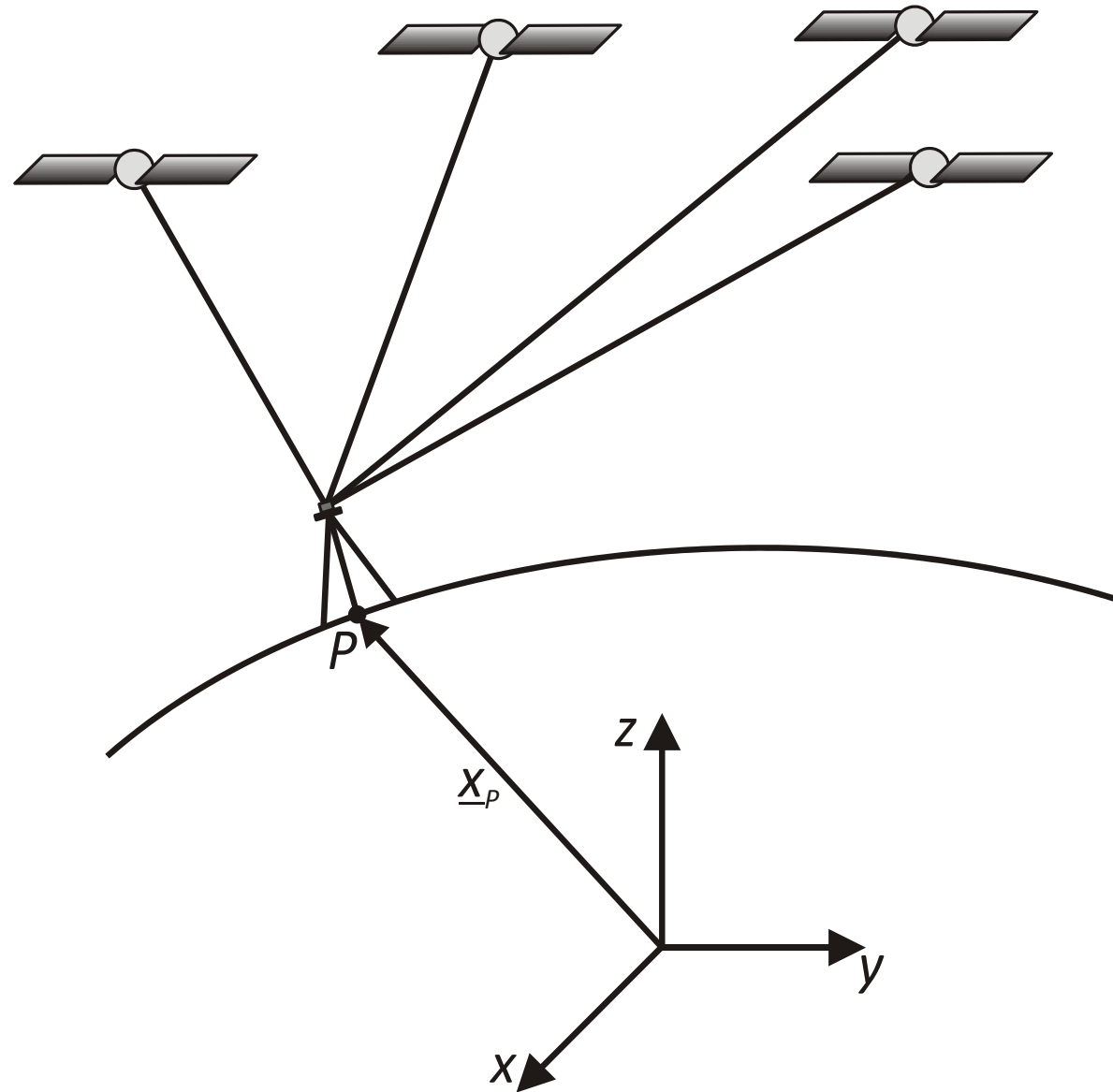
o anche:

$$p_i^j = \|\vec{x}^j - \vec{x}_i\| + (\delta\tau^j - \delta\tau_i) \cdot c + I_i^j + T_i^j \quad j = 1, 2, \dots, s$$

## Soluzione navigazionale - 1

---

E' la modalit  di navigatori per le auto e per l'escursionismo.



## Soluzione navigazionale - 2

---

Ripartiamo dalla equazione dello *pseudo-range*

$$p_i^j = \|\vec{x}^j - \vec{x}_i\| + (\delta\tau^j - \delta\tau_i) \cdot c + I_i^j + T_i^j \quad j = 1, 2, \dots, s$$

Quali sono i termini noti, incogniti e calcolati?

- $p_i^j$ : distanza satellite-ricevitore - termine calcolato
- $\vec{x}^j$ : posizione 3D del satellite - termine noto attraverso le effemeridi predette trasmesse all'interno del messaggio navigazionale D
- $\vec{x}_i$ : posizione 3D del vertici stazionato - termine incognito
- $\delta\tau^j$ : sfasamento dell'orologio del satellite - termine noto trasmesso all'interno del messaggio navigazionale D
- $\delta\tau_i$ : sfasamento dell'orologio del ricevitore - termine incognito
- $I_i^j$ : ritardo ionosferico - termine incognito
- $T_i^j$ : ritardo troposferico - termine incognito

## Soluzione navigazionale - 3

---

Per risolvere il problema dobbiamo effettuare una semplificazione trascurando i ritardi iono-troposferici: sappiamo che pagheremo un prezzo in termini di precisione delle coordinate determinate. In altri termini non correggendo l'equazione con i termini di troposfera e ionosfera peggioriamo la stima della distanza satellite-ricevitore introducendo conseguentemente un errore nella determinazione delle coordinate del punto stazionato.

Nel posizionamento navigazionale risolviamo quindi il sistema:

$$p_i^j = \|\vec{x}^j - \vec{x}_i\| + (\delta\tau^j - \delta\tau_i) \cdot c \quad j = 1, 2, \dots, s$$

le cui uniche incognite rimangono:

- $\vec{x}_i$  : 3 incognite
- $\delta\tau_i$  : 1 incognito

Come già indicato più volte sono necessari almeno 4 satelliti.

## Soluzione navigazionale - 4

---

La soluzione navigazione è la soluzione più semplice ed ha grande interesse poiché:

- basta un ricevitore per effettuare un posizionamento
- il posizionamento è di tipo assoluto (coordinate tridimensionali nel sistema di riferimento adottato)
- bastano i dati di un'epoca - una sola misura di *pseudo-range* - per fare posizionamento

## Bilancio equazioni incognite nella soluzione navigazionale - 1

---

$n_s$  – numero satelliti in vista

$n_e$  – numero di epoche di misura

Numero di equazioni (considerando costante il numero di satelliti): ho un'equazione per ogni satelliti in vista per ogni epoca di misura

$$\text{numero equazioni} = n_s \cdot n_e$$

Numero di incognite: ho le coordinate tridimensionali del vertice stazionato ed una stima dello sfasamento dell'orologio del ricevitore per ogni epoca di misura

$$\text{numero incognite} = 3 + n_e$$

## Bilancio equazioni incognite nella soluzione navigazionale - 2

---

Condizione per la soluzione (numero di equazioni maggiore o uguale al numero delle incognite):

$$n_s \cdot n_e \geq 3 + n_e$$

per cui:

$$n_e \geq \frac{3}{n_s - 1}$$

Se  $n_s \geq 4$  allora  $n_e \geq 1$ .

E' possibile determinare la posizione occupata dal ricevitore con i dati di un'epoca.

## Si possono usare sia le fasi sia i codici

---

Tutta la discussione precedente è stata fatta immaginando di usare, per la misura della distanza satellite-ricevitore, i **codici**.

Abbiamo accennato che la misura della distanza può essere fatta anche con le **fasi** ma questa scelta presenta altre caratteristiche:

- è più complessa. In particolare vi è il problema della determinazione della ambiguità iniziali. Si devono osservare, per un tempo adeguato, molti satelliti effettuando elaborazioni complesse, lente e delicate; non quindi possibile arrivare ad una soluzione attraverso una sola epoca di misura
- è estremamente più precisa



# Vantaggi e svantaggi della soluzione navigazionale

Vantaggi:

- un solo ricevitore
- misura in pochi secondi (codice)

Svantaggi:

- accuratezza: 5-10 m

Semplificare l'equazione di *pseudo-range*, ignorando l'errore connesso ai ritardi iono-troposferici porta direttamente ad un errore nella determinazione delle coordinate finali (di molti metri).

