Marica Franzini
Laboratorio di Geomatica - DIET
Università di Pavia
email: marica.franzini@unipv.it

Principi di posizionamento

Seconda Parte

Equazione di pseudo-range

Nella lezione precedente eravamo arrivati a scrivere l'equazione di *pseudo-range* nella forma:

$$p_i^j = \Delta t_i^j \cdot c = \left\| x^j - x_i \right\| \quad j = 1, 2, \dots, s$$

Ora dobbiamo modificare l'espressione analitica in modo che compaiano espressamente i termini legati agli sfasamenti temporali degli orologi dei satelliti e dei ricevitori.

Modellizzazione degli errori d'orologio - 1

Consideriamo:

- ✓ i tempi misurati in cui il segnale viene emesso e captato, τ^j e τ_i
- ✓ i tempi veri in cui il segnale viene emesso e captato, t^j e t_i

Precisamente:

- ✓ τ^j: istante in cui un segnale lascia il satellite j, misurato dall'orologio del satellite;
- ✓ t^j: istante vero in cui un segnale lascia il satellite j, misurato dall'orologio GPS (tempo GPS vero);
- ✓ τ_i : istante in cui un segnale raggiunge il ricevitore i, misurato dall'orologio del ricevitore;
- ✓ t_i: istante vero in cui un segnale raggiunge il ricevitore i, misurato dall'orologio GPS (tempo GPS vero).

Modellizzazione degli errori d'orologio - 2

Introduciamo allora i termini d'errore:

$$\tau^j + \delta\tau^j = t^j$$

$$\tau_i + \delta\tau_i = t_i$$

Il tempo di volo misurato (istante di ricezione – istante di emissione) sarà:

$$\Delta\tau_i^j = \tau_i - \tau^j$$

mentre il tempo di volo vero sarà:

$$\Delta t_i^j = t_i - t^j$$

Sostituendo:

$$\Delta t_i^j = \tau_i + \delta\tau_i - \left(\tau^j + \delta\tau^j\right) = \tau_i - \tau^j + \delta\tau_i - \delta\tau^j = \Delta\tau_i^j + \delta\tau_i - \delta\tau^j$$

Nuova equazione di *pseudo-range*

$$p_i^j = \Delta t_i^j \cdot c = \left\| x^j - x_i \right\| \quad j = 1,2, \dots, s$$

$$\begin{aligned} r_i^j = \Delta t_i^j \cdot c &= \left(\Delta\tau_i^j + \delta\tau_i - \delta\tau^j\right) \cdot c \\ &= \Delta\tau_i^j \cdot c + \left(\delta\tau_i - \delta\tau^j\right) \cdot c \\ &= p_i^j + \left(\delta\tau_i - \delta\tau^j\right) \cdot c \end{aligned}$$

Chi ci fornisce i termini di errore $\delta\tau_i$ e $\delta\tau^j$relativi agli sfasamenti degli orologi sui satelliti e nei ricevitori?

- ✓ il primo termine (piccolo) è stimato dal segmento di controllo e fornito agli utenti finali all'interno del messaggio navigazionale D
- ✓ il secondo termine deve essere considerato come un incognita del problema al pari delle coordinate del vertice stazionato.

Modellizzazione degli errori dovuti alla velocità di propagazione - 1

La velocità di propagazione media è minore di c poiché il segnale emesso dai satelliti non viaggia nel vuoto ma all'interno dell'atmosfera e più precisamente all'interno dello strato ionosferico e troposferico.

Poiché la velocità reale è minore rispetto a quella teorica, introducendo il valore c, si avrà che la distanza satellite-ricevitore misurata è maggiore rispetto a quella reale.

Per tenere conto di questa fonte di errore possono essere introdotti due nuovi fattori correttivi legati al ritardo che il segnale subisce attraversando la ionosfera e la troposfera.

La nuova equazione di *pseudo-range* sarà:

$$r_i^j = p_i^j + \left(\delta\tau_i - \delta\tau^j\right) \cdot c - I_i^j - T_i^j$$

Modellizzazione degli errori dovuti alla velocità di propagazione - 2

Ionosfera: parte alta dell'atmosfera

Troposfera: parte bassa

I meccanismi fisici che determinano il ritardo sono diversi e le strategie per eliminare i conseguenti errori diverse e ciò spiega come mai si introducano i due termini separatamente.

In linea di principio I_i^j e T_i^j sono diversi per ogni satellite e per ogni ricevitore, in quanto dipendono dalle condizioni chimico-fisiche della parte di atmosfera attraversata.

Esamineremo meglio in seguito queste due fonti di errore.

Sintesi sulle stime del *range*

Prima equazione approssimata:

$$\hat{r}_i^j = p_i^j \qquad\qquad j = 1,2,\dots,s$$

Tenendo conto del fattore orologi:

$$\hat{r}_i^j = p_i^j + \left(\delta\tau_i - \delta\tau^j\right) \cdot c \qquad\qquad j = 1,2,\dots,s$$

Tenendo conto del ritardo iono-troposferico:

$$\hat{r}_i^j = p_i^j + \left(\delta\tau_i - \delta\tau^j\right) \cdot c - I_i^j - T_i^j \qquad\qquad j = 1,2,\dots,s$$

Equazione dello *pseudo-range* con i codici

L'equazione dello *pseudo-range* si ottiene risolvendo l'equazione fondamentale usando come stima del *range* l'ultima indicata:

$$r_i^j = \left\| \vec{x}^{\,j} - \vec{x}_i \right\| \qquad j = 1,2,\dots,s$$

$$p_i^j + \left(\delta\tau_i - \delta\tau^j\right) \cdot c - I_i^j - T_i^j = \left\| \vec{x}^{\,j} - \vec{x}_i \right\| \qquad j = 1,2,\dots,s$$

Da cui:

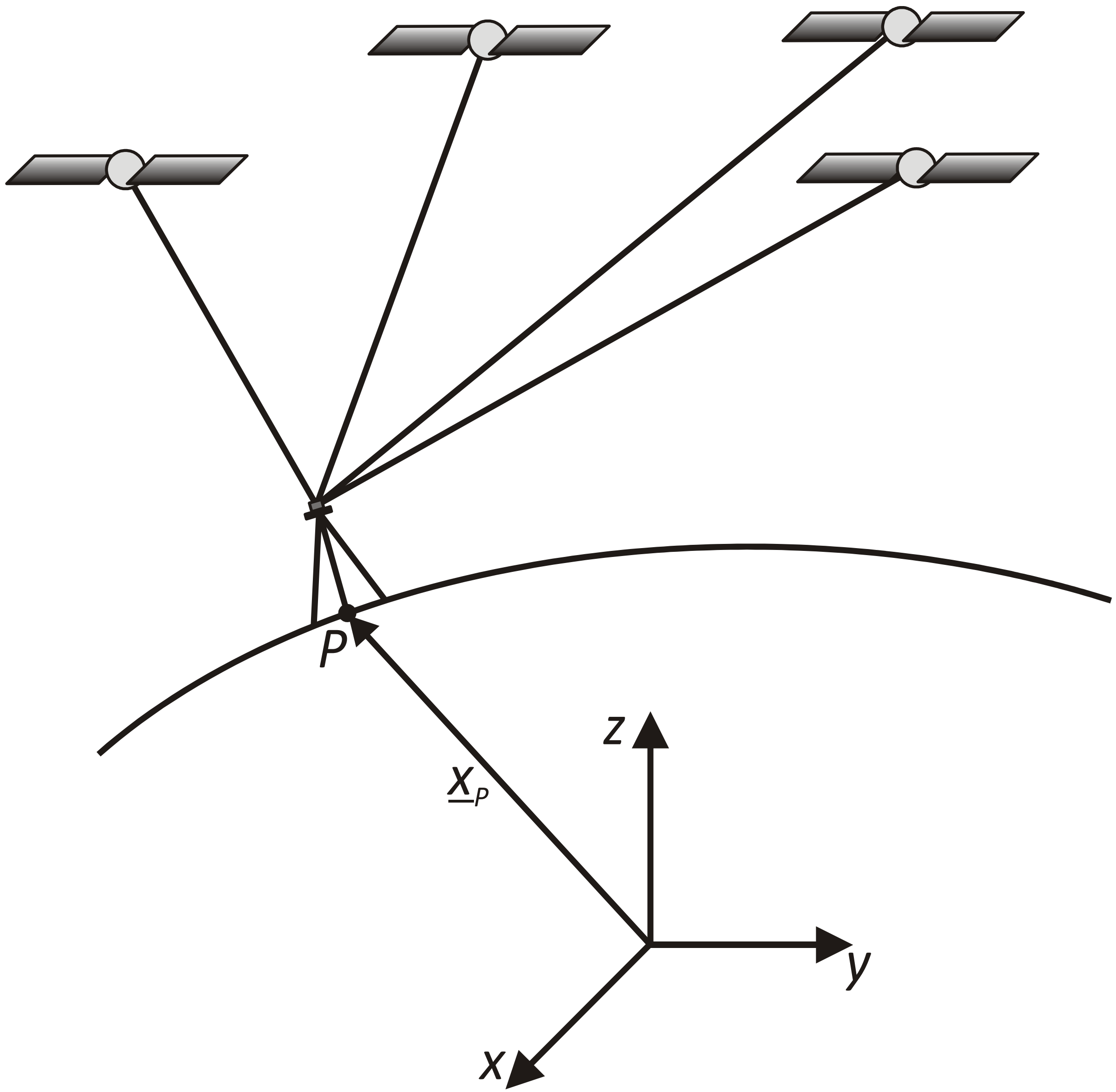
$$p_i^j = \left\| \vec{x}^{\,j} - \vec{x}_i \right\| - \left(\delta\tau_i - \delta\tau^j\right) \cdot c + I_i^j + T_i^j \qquad j = 1,2,\dots,s$$

o anche:

$$p_i^j = \left\| \vec{x}^{\,j} - \vec{x}_i \right\| + \left(\delta\tau^j - \delta\tau_i\right) \cdot c + I_i^j + T_i^j \qquad j = 1,2,\dots,s$$

Soluzione navigazionale - 1

E’ la modalità dei navigatori per le auto e per l’escursionismo.



Soluzione navigazionale - 2

Ripartiamo dalla equazione dello *pseudo-range*

$$p_i^j = \left\|\vec{x}^j - \vec{x}_i\right\| + \left(\delta\tau^j - \delta\tau_i\right) \cdot c + I_i^j + T_i^j \qquad j = 1,2, \dots, s$$

Quali sono i termini noti, incogniti e calcolati?

- ✓ p_i^j: distanza satellite-ricevitore - termine calcolato
- ✓ $\overrightarrow{x^j}$: posizione 3D del satellite - termine noto attraverso le effemeridi predette trasmesse all'interno del messaggio navigazionale D
- ✓ $\overrightarrow{x_\imath}$: posizione 3D del vertici stazionato - termine incognito
- ✓ $\delta\tau^j$: sfasamento dell'orologio del satellite - termine noto trasmesso all'interno del messaggio navigazionale D
- ✓ $\delta\tau_i$: sfasamento dell'orologio del ricevitore - termine incognito
- ✓ I_i^j : ritardo ionosferico - termine incognito
- ✓ T_i^j : ritardo troposferico - termine incognito

Soluzione navigazionale - 3

Per risolvere il problema dobbiamo effettuare una semplificazione trascurando i ritardi iono-troposferici: sappiamo che pagheremo un prezzo in termini di precisione delle coordinate determinate.

Risolviamo quindi il sistema:

$$p_i^j = \left\| \vec{x}^{\,j} - \vec{x}_i \right\| + \left(\delta\tau^j - \delta\tau_i \right) \cdot c \qquad\qquad j = 1,2, \dots, s$$

le cui uniche incognite rimangono:

- ✓ $\overrightarrow{x_\imath}$: 3 incognite
- ✓ $\delta\tau_i$: 1 incognita

Come già indicato più volte sono necessari almeno 4 satelliti.

Soluzione navigazionale - 4

La soluzione navigazione è la soluzione più semplice ed ha grande interesse poiché:

- ✓ basta un ricevitore per effettuare un posizionamento
- ✓ il posizionamento è di tipo assoluto (coordinate tridimensionali nel sistema di riferimento adottato)
- ✓ bastano i dati di un'epoca - una sola misura di *pseudo-range* - per fare posizionamento

Bilancio equazioni incognite nella soluzione navigazionale - 1

n_s – numero satelliti in vista
n_e – numero di epoche di misura

Numero di equazioni (considerando costante il numero di satelliti): ho un'equazione per ogni satelliti in vista per ogni epoca di misura

$$numero\ equazioni = n_s \cdot n_e$$

Numero di incognite: ho le coordinate tridimensionali del vertice stazionato ed una stima dello sfasamento dell'orologio del ricevitore per ogni epoca di misura

$$numero\ incognite = 3 + n_e$$

Bilancio equazioni incognite nella soluzione navigazionale - 2

Condizione per la soluzione (numero di equazioni maggiore o uguale al numero delle incognite):

$$n_s \cdot n_e \geq 3 + n_e$$

per cui:

$$n_e \geq \frac{3}{n_s - 1}$$

Se $n_s \geq 4$ allora $n_e \geq 1$.
E' possibile determinare la posizione occupata dal ricevitore con i dati di un'epoca.

Si possono usare sia le fasi sia i codici

Tutta la discussione precedente è stata fatta immaginando di usare, per la misura della distanza satellite-ricevitore, i **codici**.

Abbiamo accennato che la misura della distanza può essere fatta anche con le **fasi** ma questa scelta presenta altre caratteristiche:

- ✓ è più complessa. In particolare vi è il problema della determinazione della ambiguità iniziali. La correlazione misura la parte frazionaria e il numero intero di lunghezze d'onda deve essere determinato osservando per un tempo adeguato molti satelliti e facendo elaborazioni complesse, lente e delicate;
- ✓ non quindi possibile arrivare ad una soluzione attraverso una sola epoca di misura;
- ✓ d'altra parte è estremamente più precisa.

Vantaggi e svantaggi della soluzione navigazionale

Vantaggi:

- ✓ un solo ricevitore
- ✓ misura in pochi secondi

Svantaggi:

- ✓ accuratezza: 5-10 m

Semplificare l'equazione di *pseudo-range,* ignorando l'errore connesso ai ritardi iono-troposferici porta direttamente ad una errore nella determinazione delle coordinate finali.